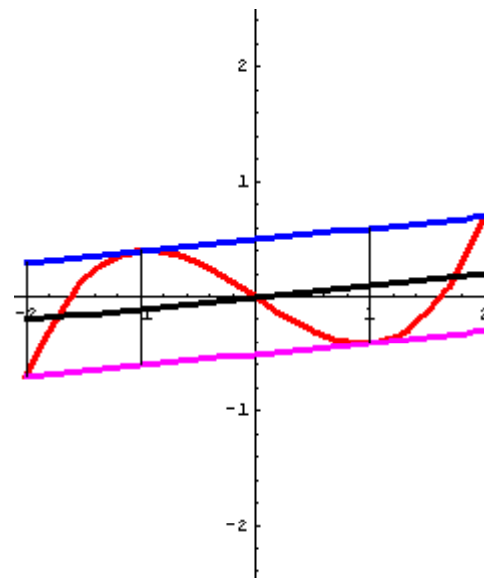
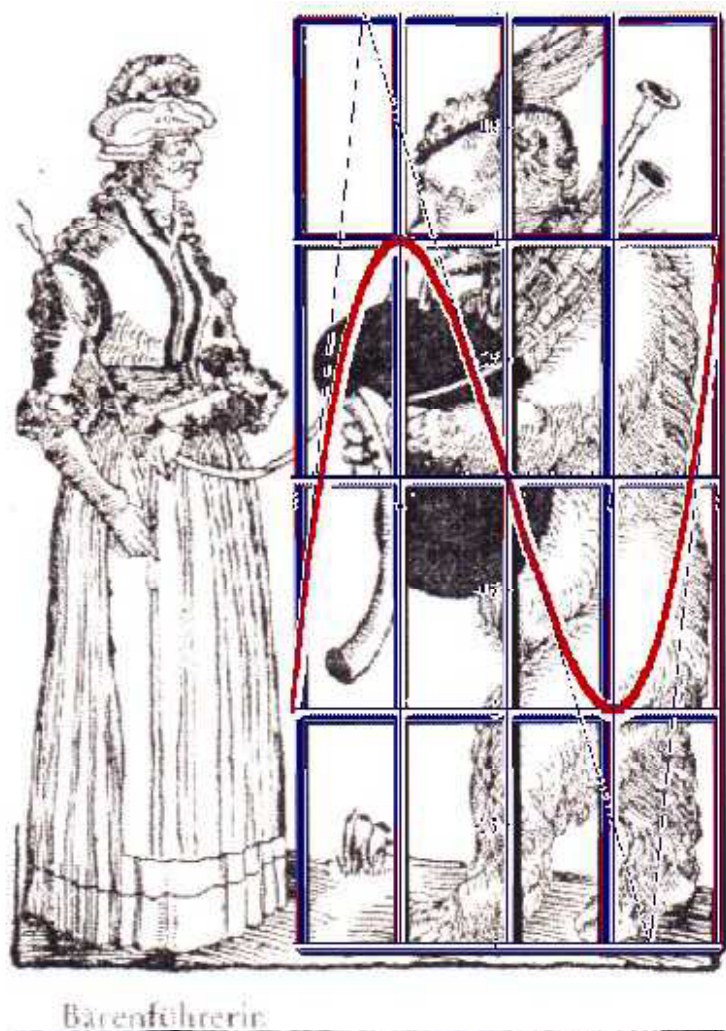


Polynome und mehrfache Nullstellen

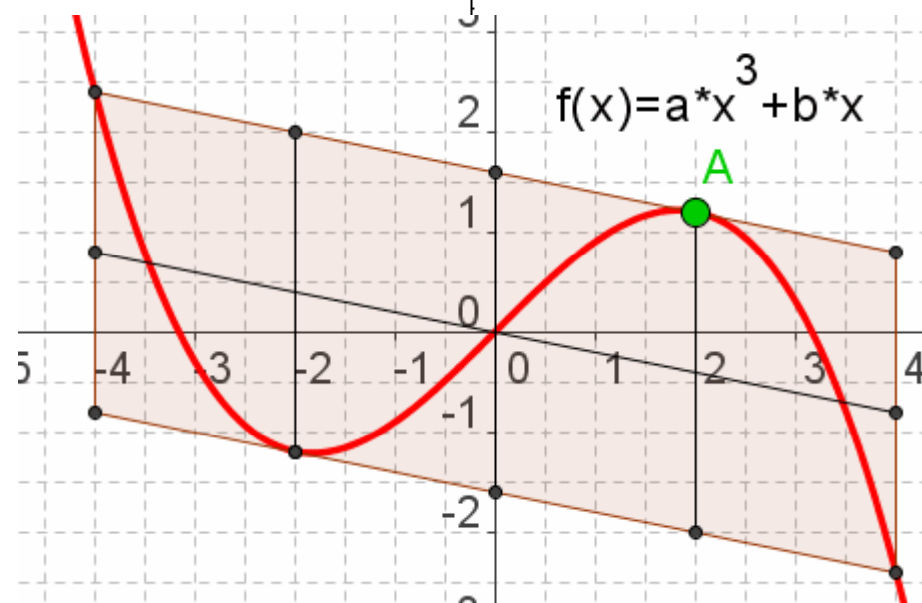
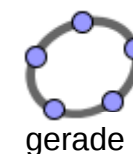
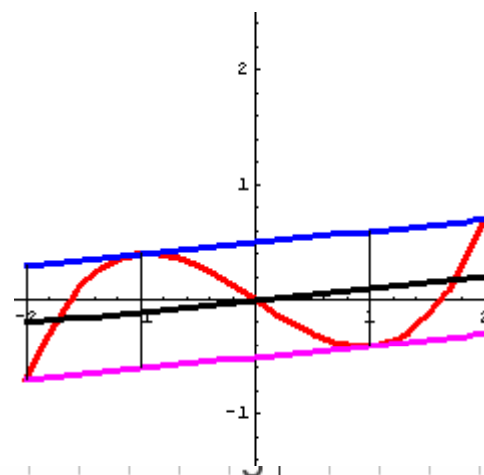
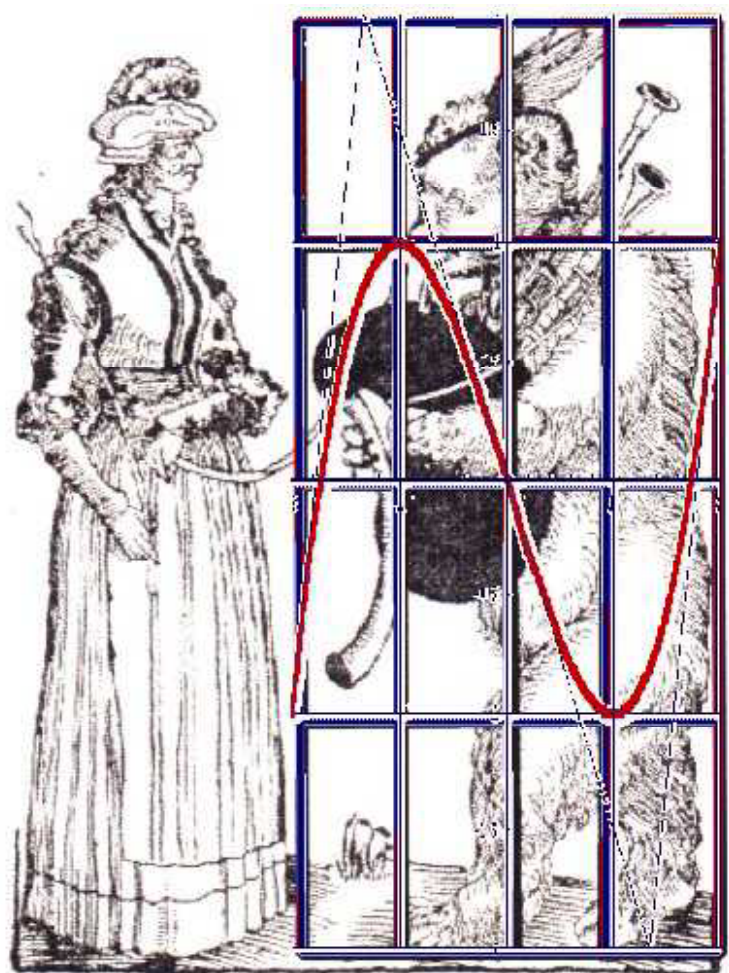


Polynome sind Gefangene ihrer
leicht durchschaubaren
Eigenschaften.

Stichwort: Polynome
im Affenkasten

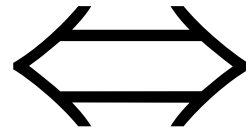
www.mathematik-verstehen.de

Polynome und mehrfache Nullstellen



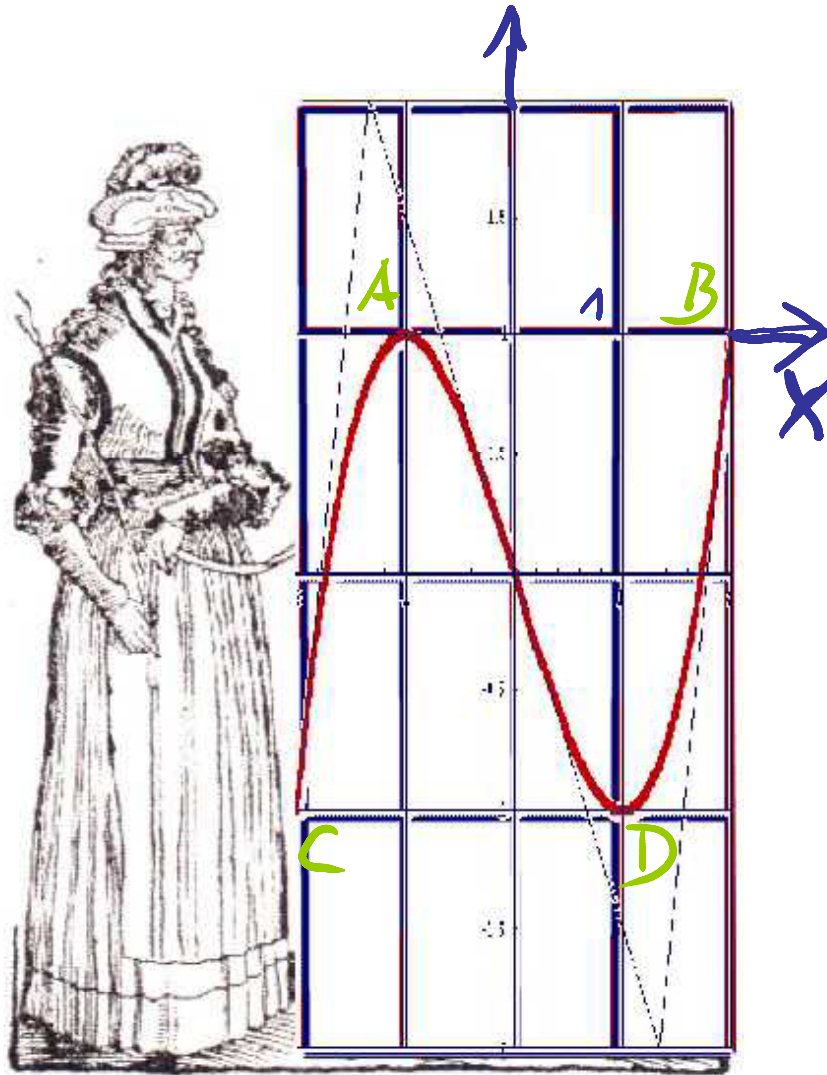
www.mathematik-verstehen.de

Nullstellen



Linearfaktoren

Lin.



$$f(x) = -\frac{1}{2} (x+1)^2 (x-2)$$

doppelte
Nullstelle

einfache
Nullstelle

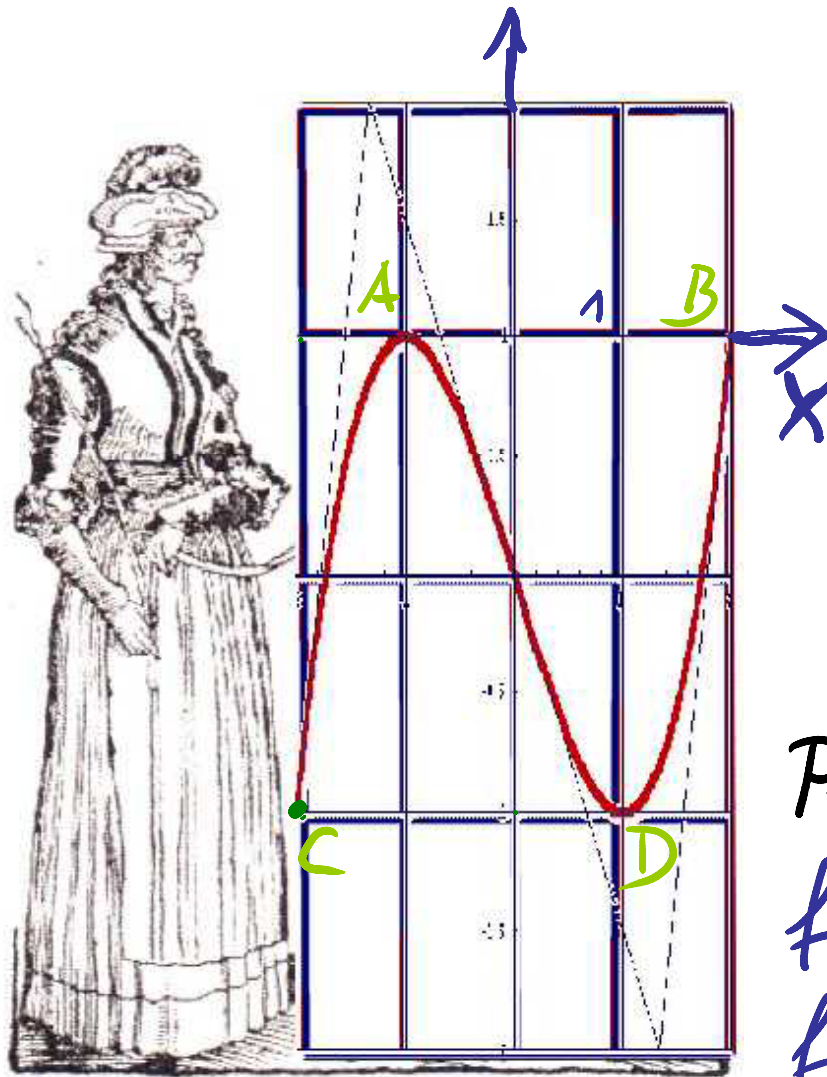
$$x = -1$$

A

$$x = 2$$

B

Nullstellen $\longleftrightarrow$ Linearfaktoren



$$f(x) = (x+1)^2 (x-2)$$

doppelte Nullstelle einfache Nullstelle

$$x = -1$$

A

$$x = 2$$

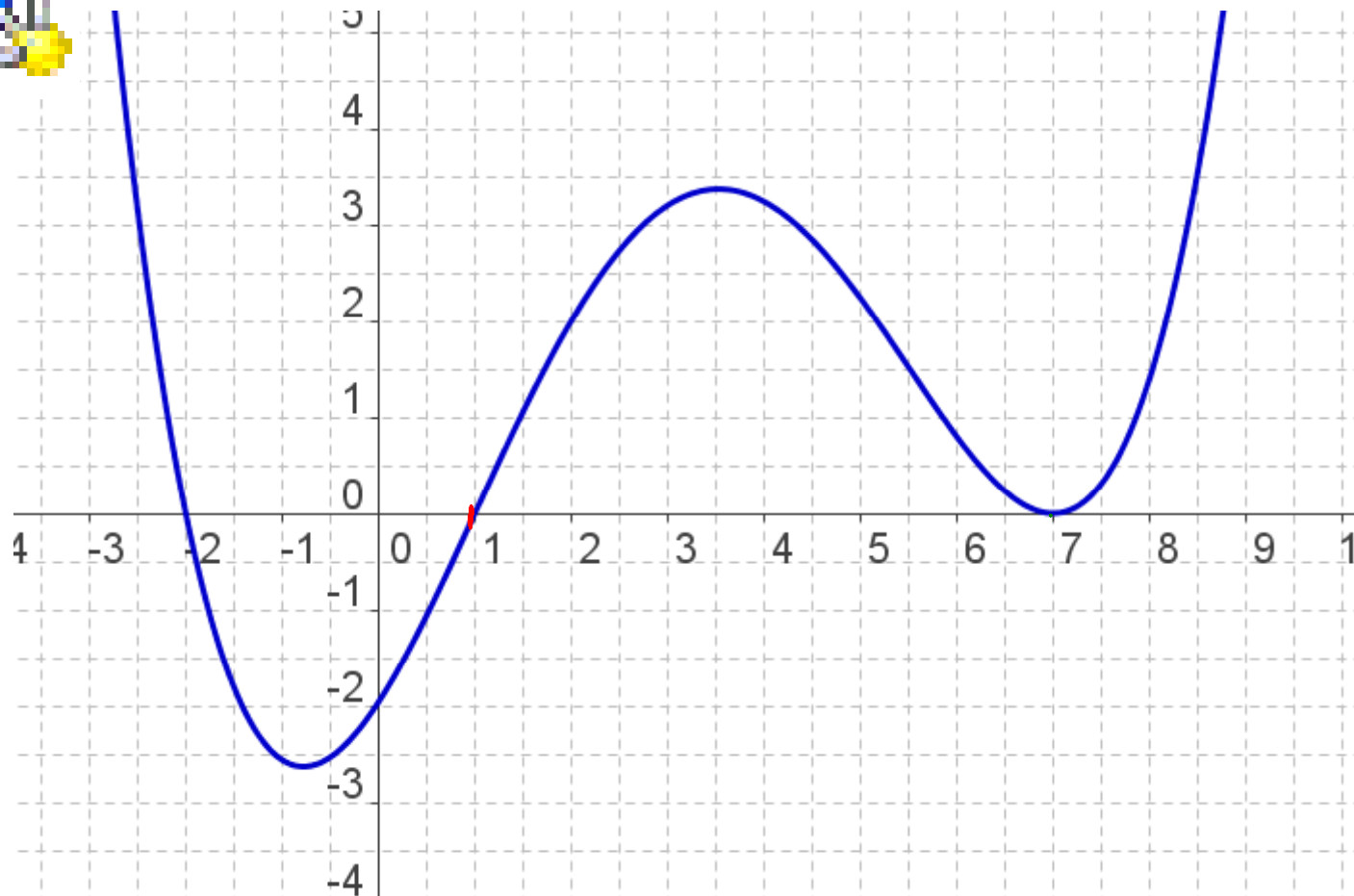
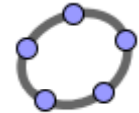
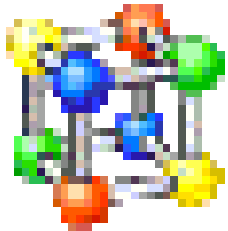
B

Proben

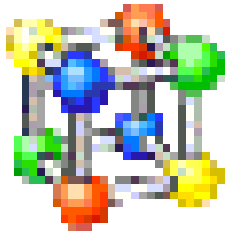
$$f(-2) = (-2+1)^2 (-2-2) \quad C$$

$$f(1) = \overset{-4}{(1+1)^2} (1-2) = -4 \quad D$$

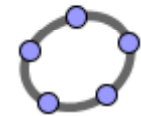
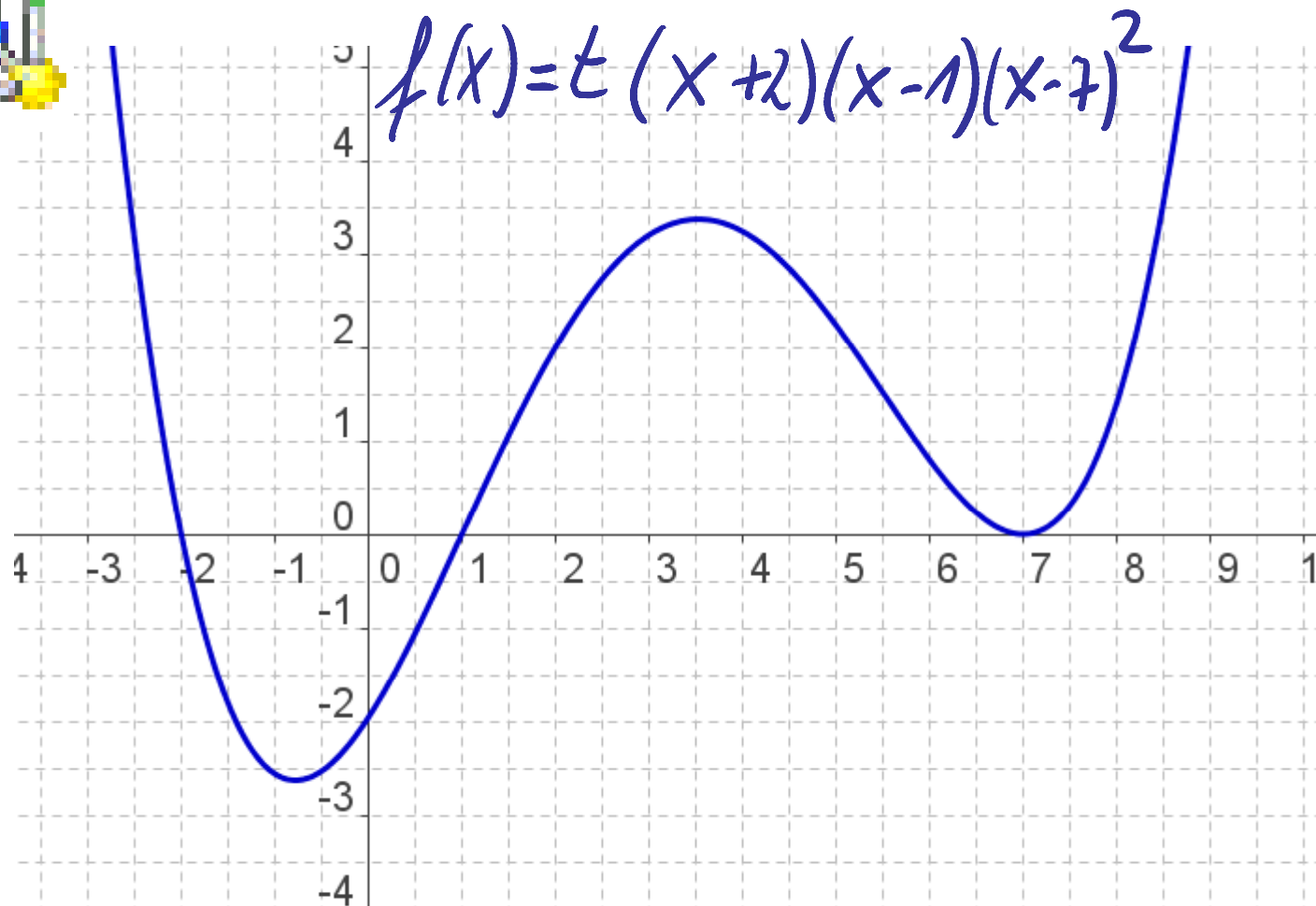
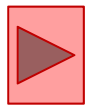
Welche Gleichung kann dieses Polynom haben?



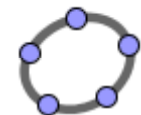
Welche Gleichung kann dieses Polynom haben?



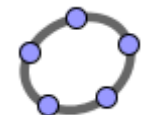
Folie 11



Diese
Funktion



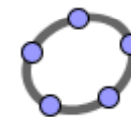
Vieta



Vieta, mehr
6



Was ist eigentlich ein Polynom?



$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

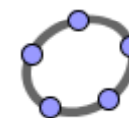
Ein Polynom ist eine Summe von Potenzfunktionen.

Der höchste Exponent, der vorkommt, heißt **Grad des Polynoms**.

- Polynome 1. Grades sind die Geraden ✓
- Polynome 2. Grades sind die Parabeln ✓
- Polynome 3. Grades haben immer eine symmetrische s-Form. ✓
- Polynome 4. Grades haben höchstens 3 Extrema. ✓
- Je höher der Grad, desto vielfältigere Formen sind möglich. ✓



Polynome und ihre Linearfaktoren



Jede reelle Nullstelle a
erzeugt einen Linearfaktor. $(x - a)$

$$f(x) = (x - a) q(x)$$

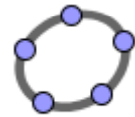
Wenn das Restpolynom auch noch die Nullstelle a
enthält, kann man den Linearfaktor mehrfach „herausziehen“.

$$f(x) = (x - a)^k p(x) \quad \text{mit} \quad p(a) \neq 0$$

Geht das maximal k -mal, dann heißt a k -fache Nullstelle,
oder „Nullstelle der Vielfachheit k “



Polynome und ihre Linearfaktoren



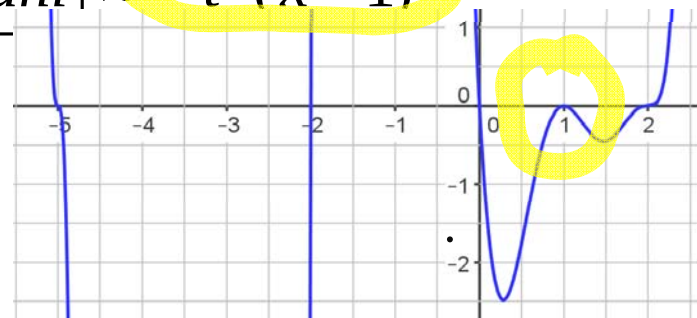
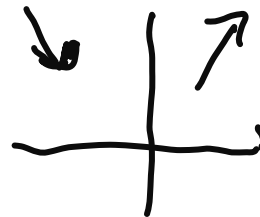
$$f(x) = (x - a)^k p(x) \quad \text{mit } p(a) \neq 0$$

In der Nähe eine k-fachen Nullstelle verhält sich das Polynom wie sich die k-Potenzfunktion im Ursprung verhält.

$$f(x) = (x + 5)^3 (x + 2) x (x - 1)^2 (x - 2)^3$$

$$f(\text{nahe } 1) = \boxed{\text{pos. Zahl}} \cdot (x - 1)^2 \cdot \boxed{\text{neg. Zahl}} \approx -t \cdot (x - 1)^2$$

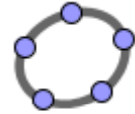
Grad 10 Gesamtverlauf



Ein Polynom n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen, mit ihrer Vielfachheit gezählt. Fundamentalsatz der Algebra (reell)



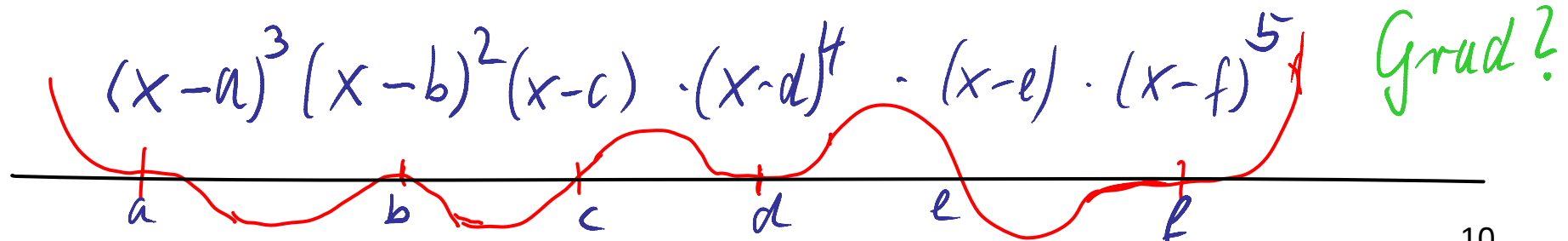
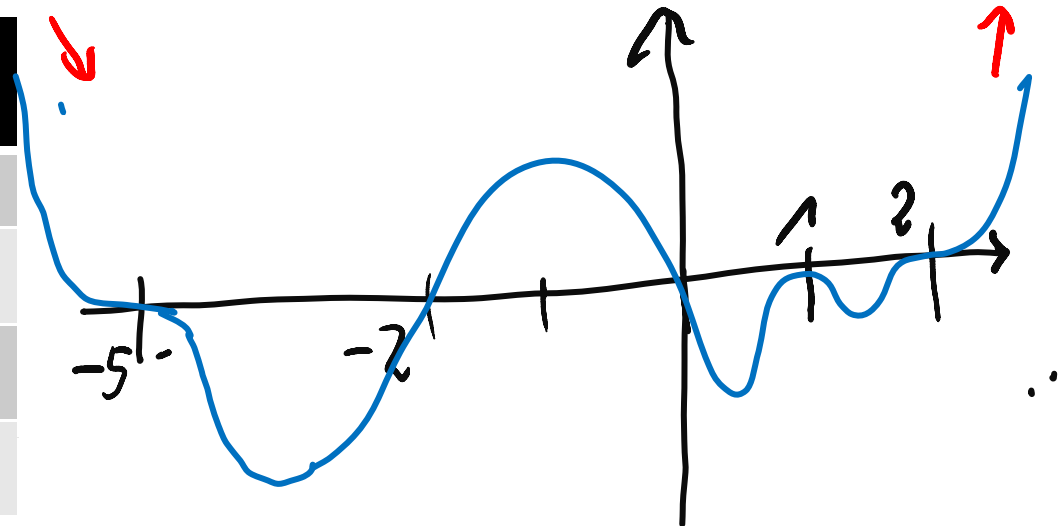
Polynome und ihre Linearfaktoren

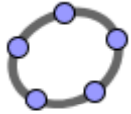


$$f(x) = (x+5)^3 (x+2) x (x-1)^2 (x-2)^3$$

Qualitativer Graph eines durch Linearfaktoren gegeben Polynoms

Vorzeichen	Grad	Ges. Verlauf
+	gerade	↘ ↗
-	gerade	↗ ↘
+	ungerade	↗ ↗
-	ungerade	↘ ↘

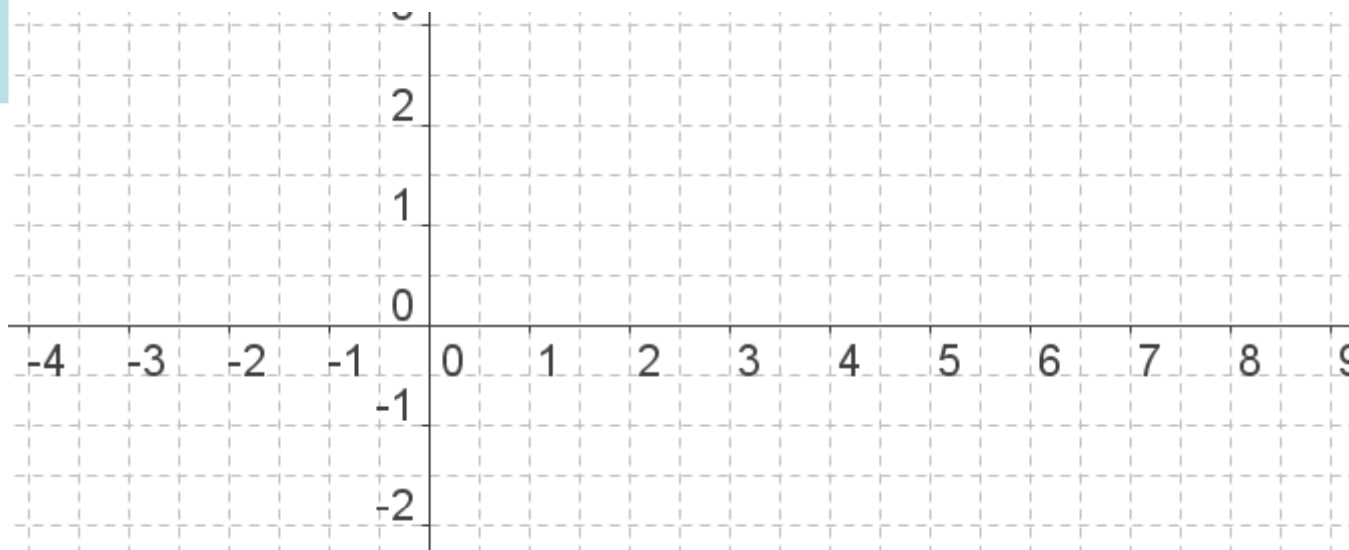


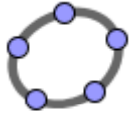


Polynome
aus Linearfaktoren Zeichnen

Übung 2 mit Polynomen

$$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)(x-7)^2$$



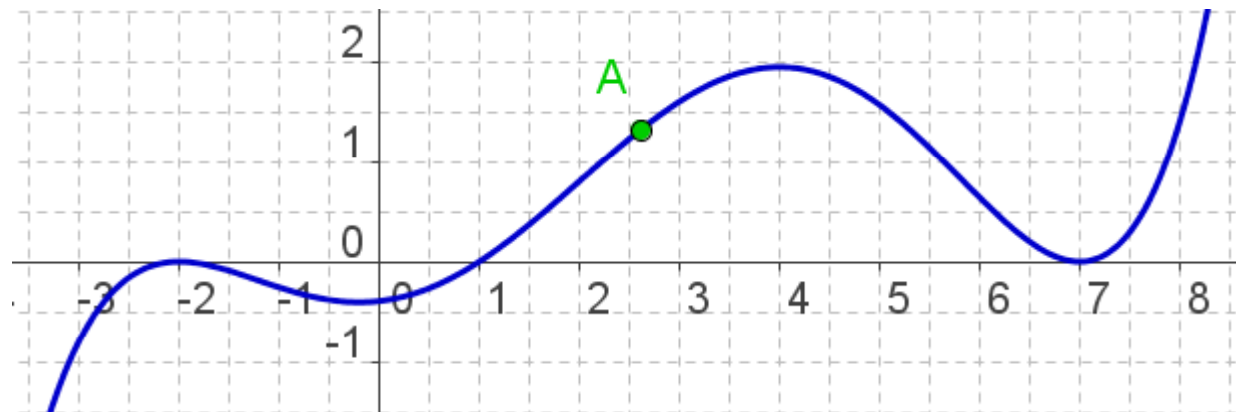
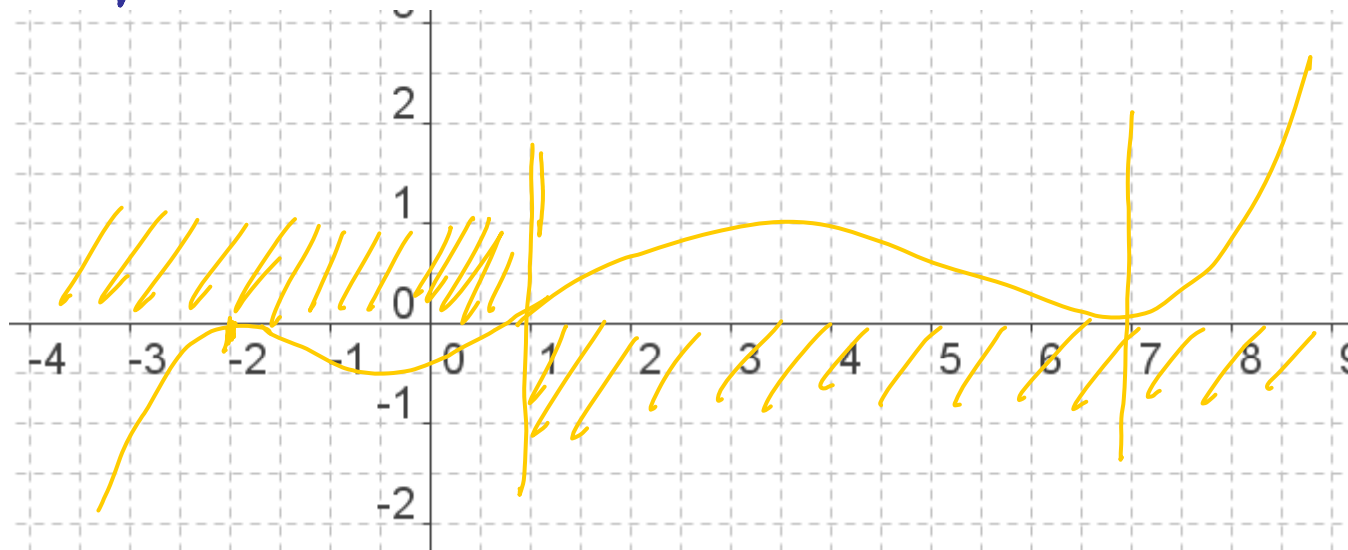


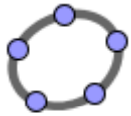
Polynome
aus Linearfaktoren Zeichnen

Übung 2 mit Polynomen

$$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)(x-7)^2$$

Grad 5
↗
↑
↖





Übung 3 mit Polynomen

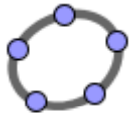
Polynome

aus Linearfaktoren Zeichnen

$$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)(x-7)^3$$

Grad 6
↙ ↘
↑
→

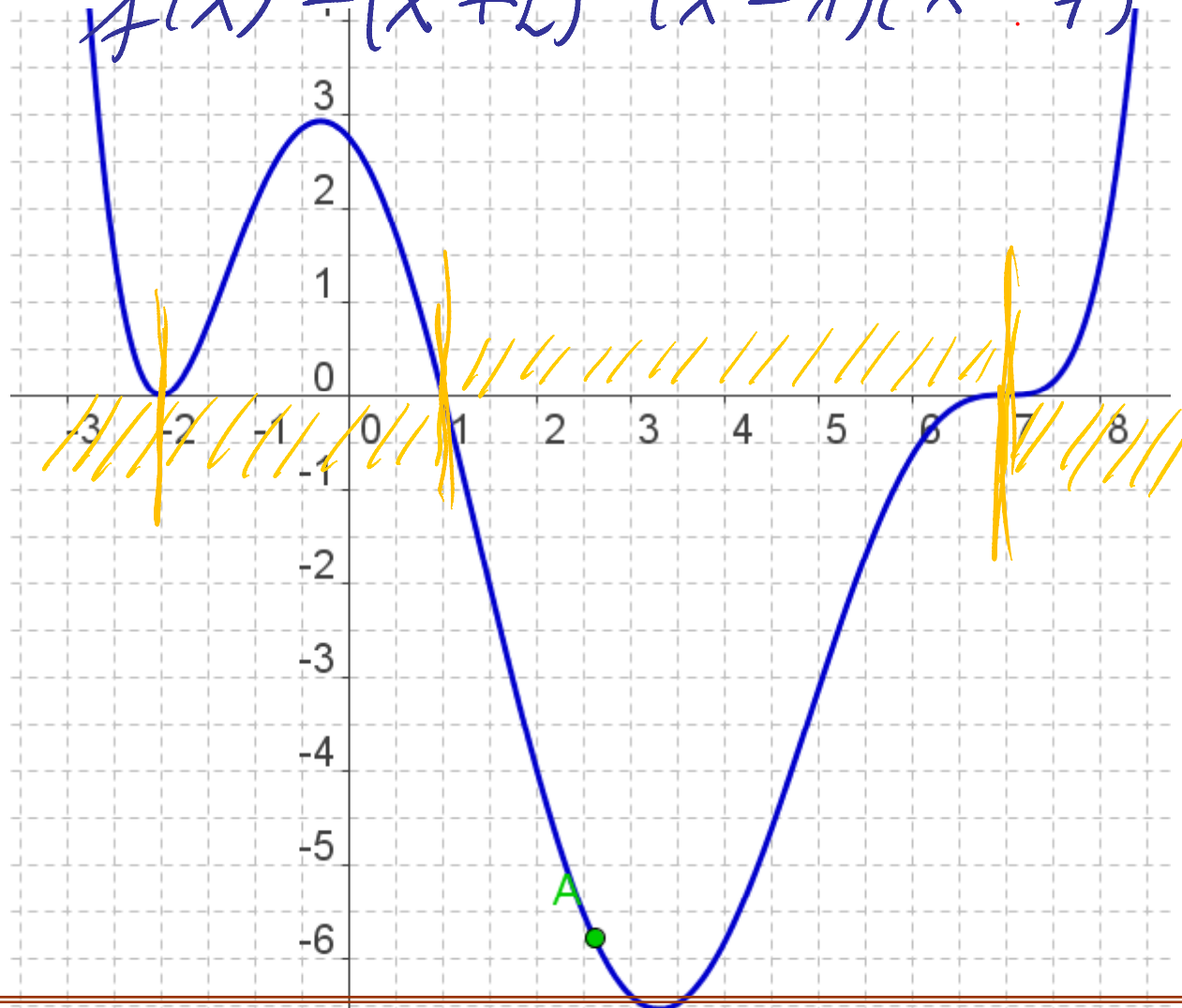
x



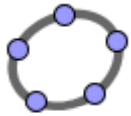
Polynome
aus Linearfaktoren Zeichnen

Übung 3 mit Polynomen

$$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)(x-7)^3$$



Grad 6
↘ ↑ ↗
+ →



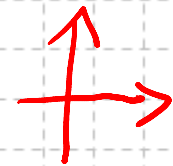
Übung 4 mit Polynomen

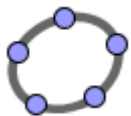
Polynome

aus Linearfaktoren Zeichnen

$$f(x) = -(x+2)^2 \cdot (x-1)(x-7)^3$$

Grad



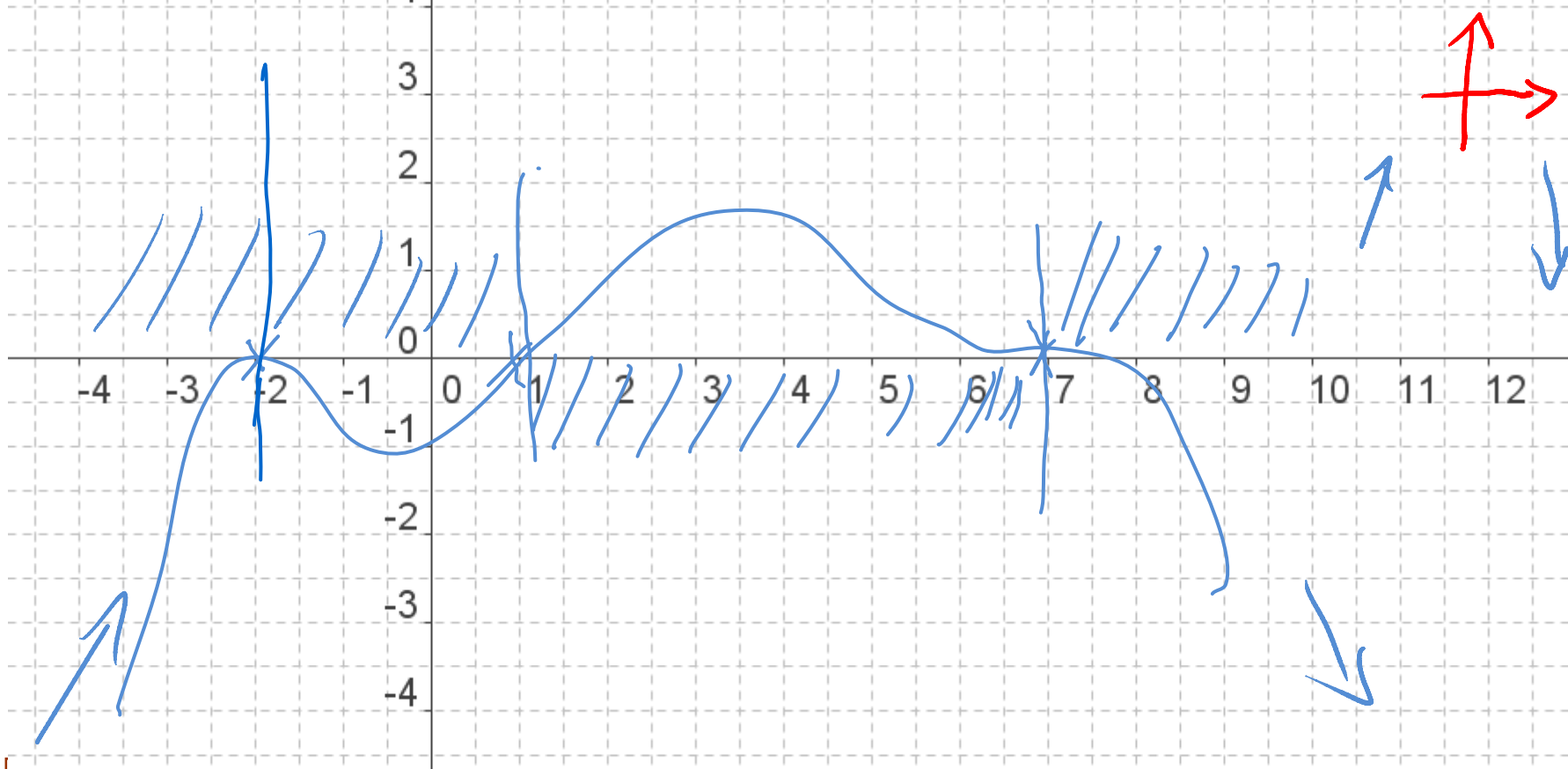


Polynome
aus Linearfaktoren
zeichnen

Übung 4 mit Polynomen

$$f(x) = -(x+2)^2 \cdot (x-1) \cdot (x-7)^3$$

Grad 6



Funktionen als zentrales Werkzeug

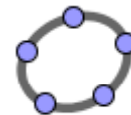
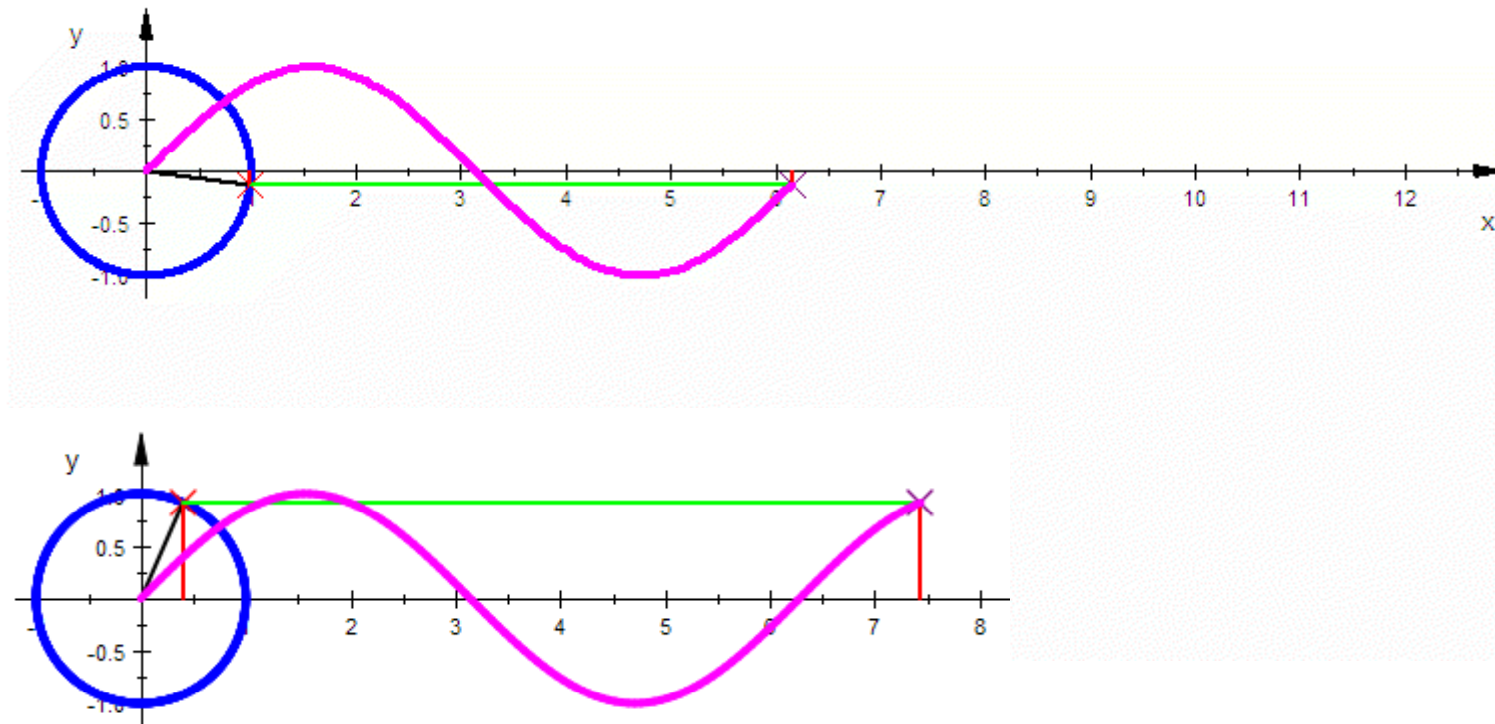
- Potenzfunktionen
- Polynome
- Trigonometrische Funktionen
- Exponentialfunktionen
- Davon so manche Umkehrfunktionen
 - Wurzelfunktionen
 - Arkusfunktionen
 - Logarithmusfunktionen

Das war's dann aber auch

Und das noch koppeln mit $+$ $-$ $\cdot$ $/$ $\wedge$ und Verkettung.

17

Funktionen als zentrales Werkzeug



Sinusfunktion

Die Winkel-Funktionen

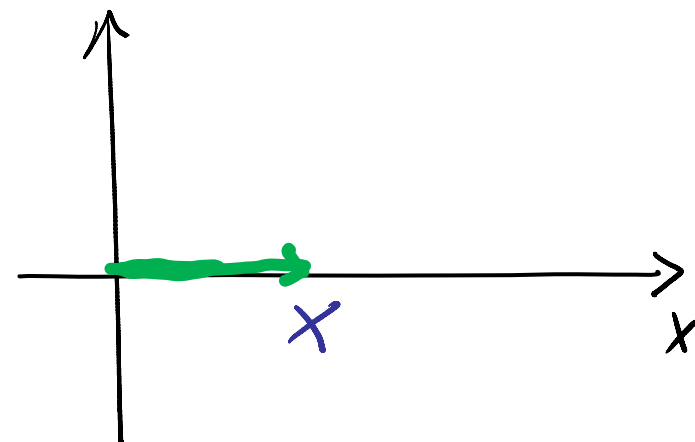
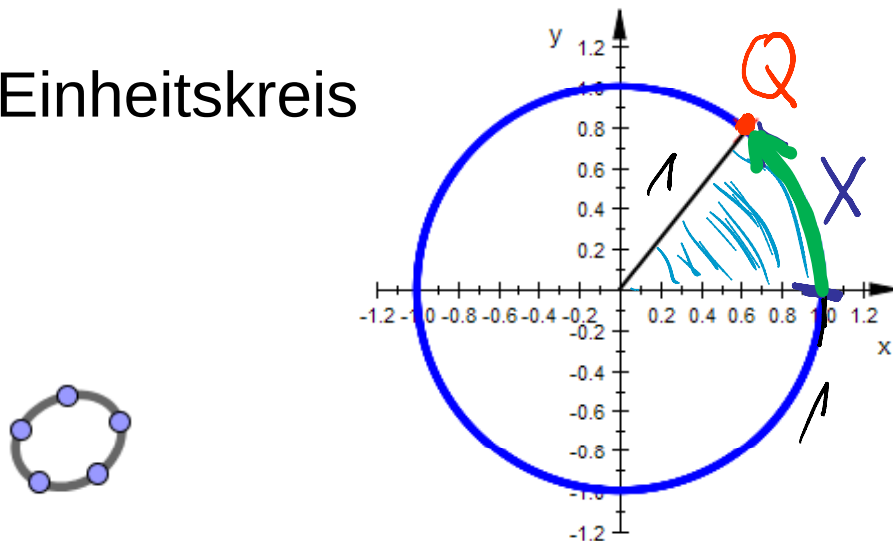
Der Punkt Q läuft im Einheitskreis vom Start (1/0).

(mathematisch positiv = gegen die Uhr)

Den von Q zurückgelegten Weg x nennt man auch „das Bogenmaß des Winkels“, um den sich Q gedreht hat.

Kurz: x ist der Winkel im Bogenmaß

Einheitskreis

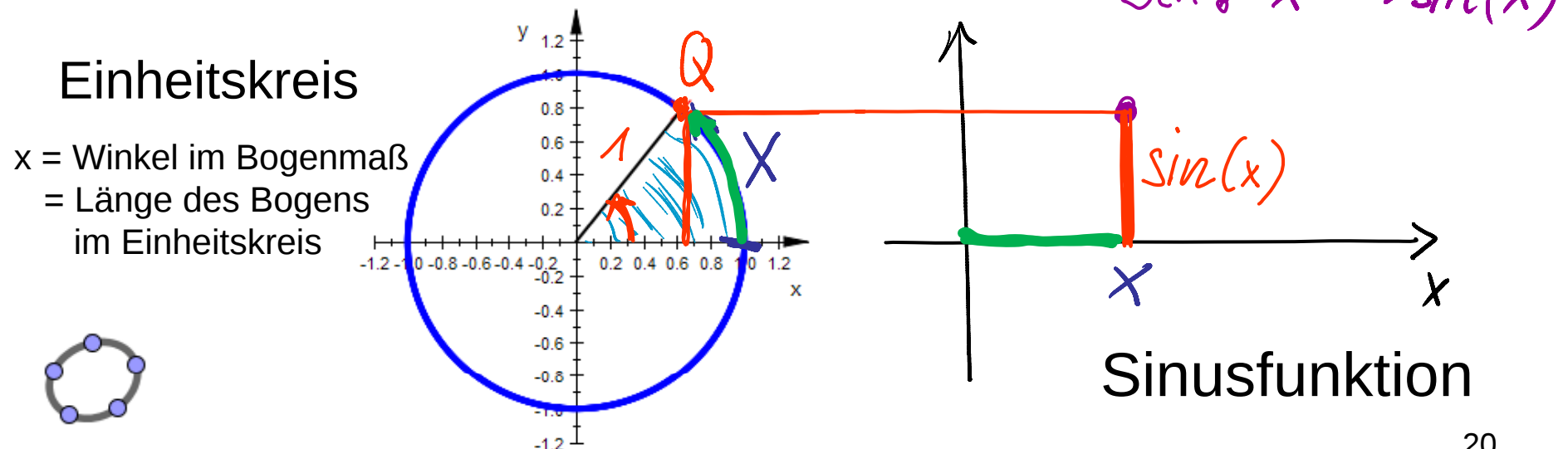


x wird Argument einer Funktion

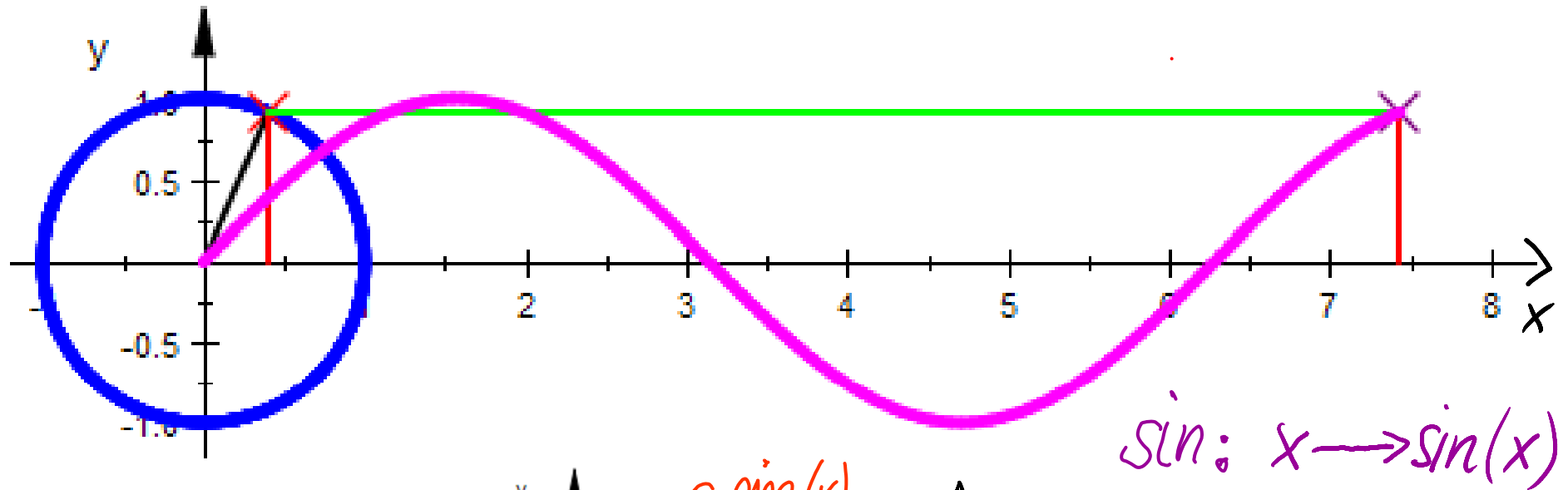
Die Sinus-Funktion

Dem Winkel x wird nun die Ordinate von Q zugeordnet.

Die Funktion, die das leistet, heißt **Sinus-Funktion**.



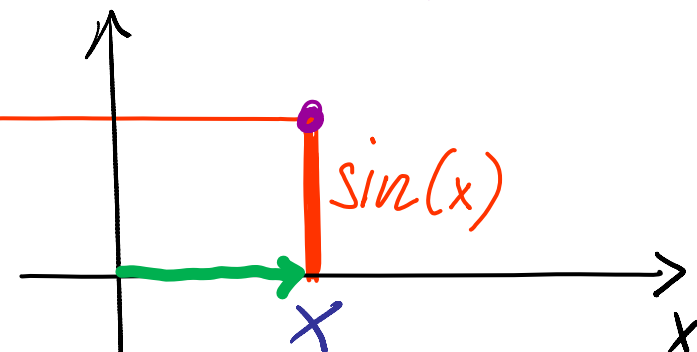
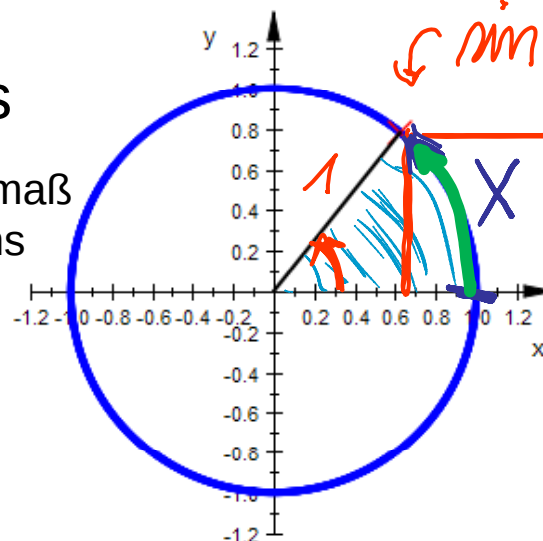
Die Sinus-Funktion



$$\sin: x \rightarrow \sin(x)$$

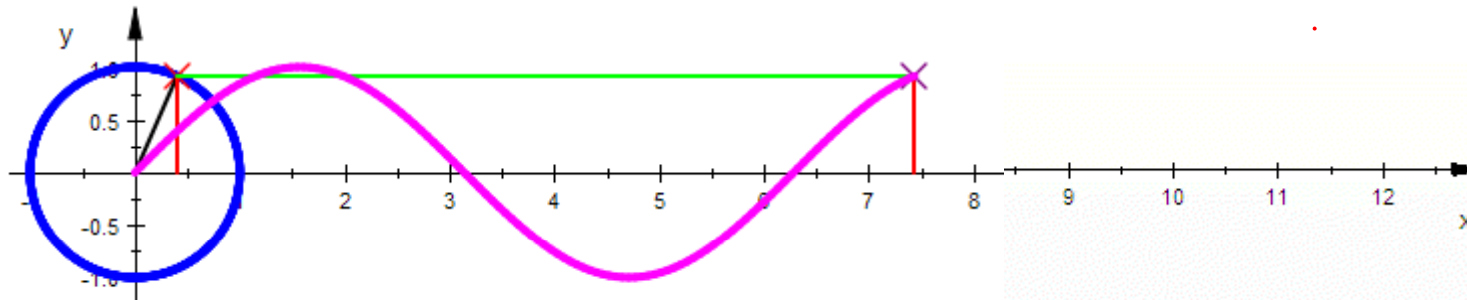
Einheitskreis

x = Winkel im Bogenmaß
= Länge des Bogens
im Einheitskreis

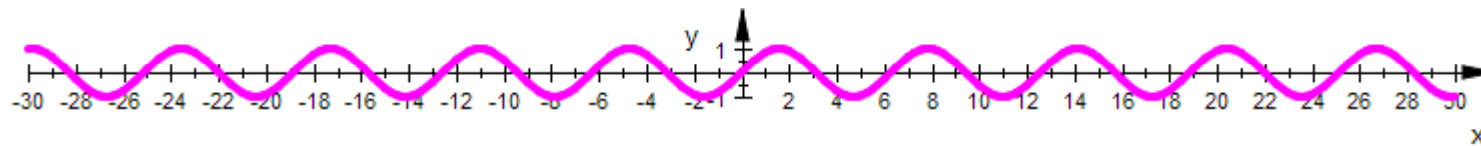


Sinusfunktion

Eigenschaften der Sinus-Funktion



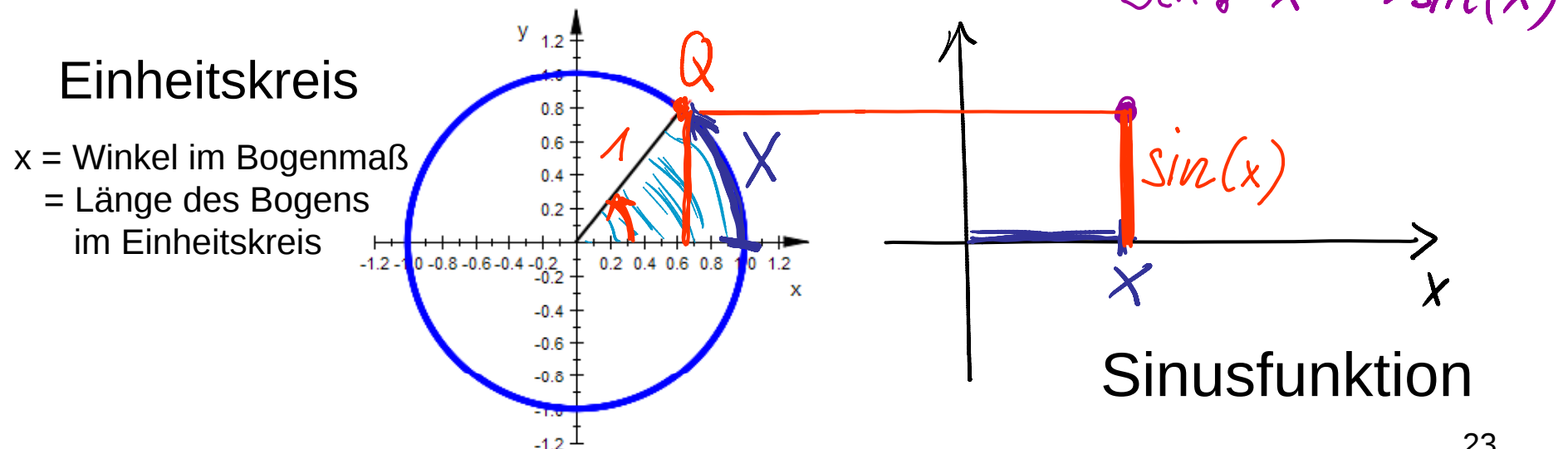
- Die Sinus-Funktion ist periodisch.
- Die Periode ist 2π .
- Die Sinuswerte liegen zwischen -1 und + 1.
- Die Sinusbögen sind symmetrisch.
- Die Sinuskurve ist punktsymmetrisch zum Ursprung



Die Sinus-Funktion

Dem Winkel x wird nun die Ordinate von Q zugeordnet.

Die Funktion, die das leistet, heißt Sinus-Funktion.



Die Kosinus-Funktion

Dem Winkel x wird nun die ~~Ordinate~~ von Q zugeordnet.

Abzisse

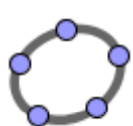
Die Funktion, die das leistet, heißt ~~Sinus~~-Funktion.

Kosinus

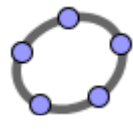
$$\cos : x \rightarrow \cos(x)$$

Einheitskreis

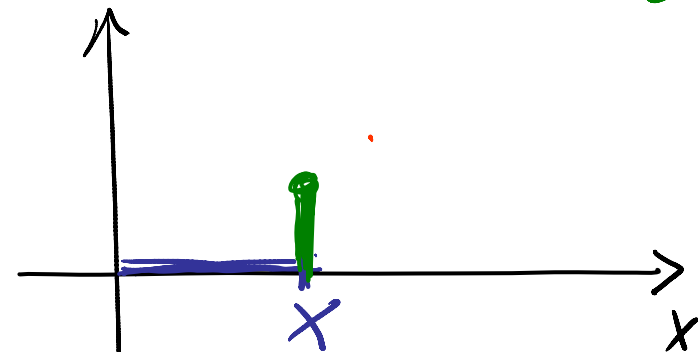
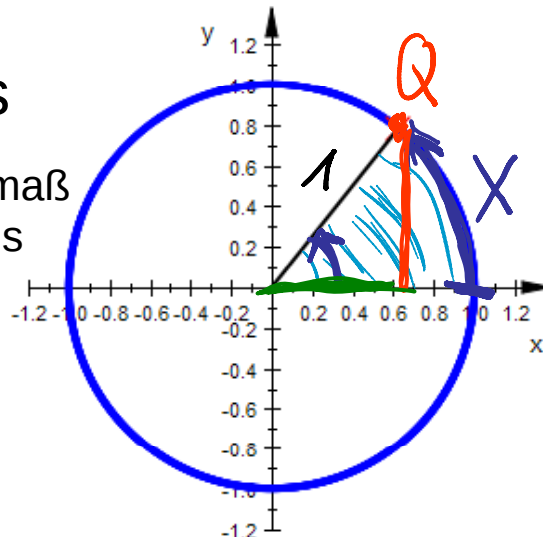
x = Winkel im Bogenmaß
= Länge des Bogens
im Einheitskreis



Tangens

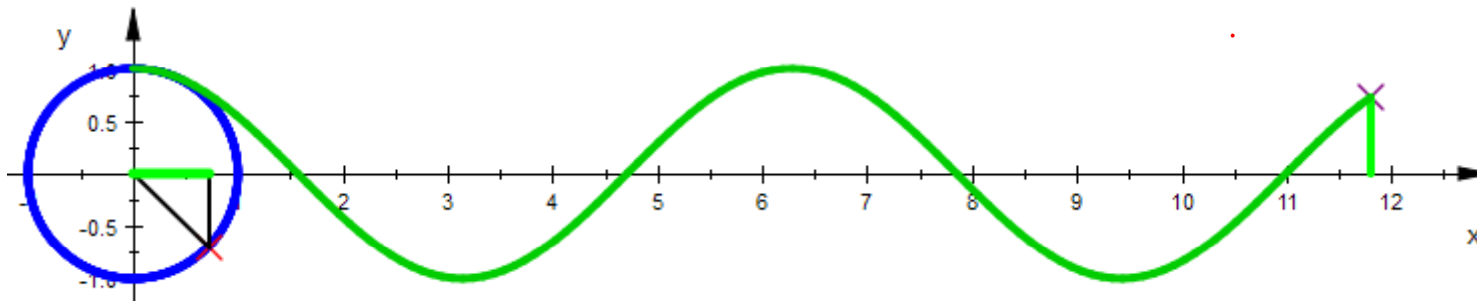


Kosinus

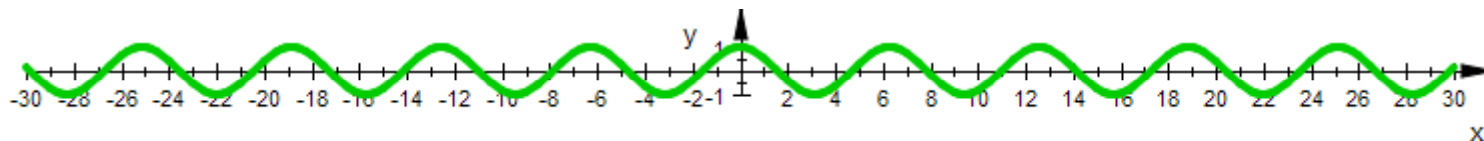


Ko Sinusfunktion

Eigenschaften der Kosinus-Funktion

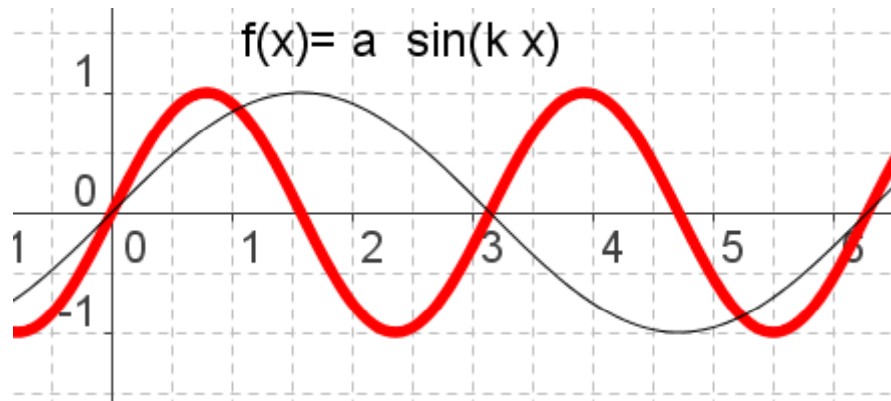
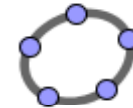


- Die Kosinus-Funktion ist periodisch.
- Die Periode ist 2π .
- Die Kosinuswerte liegen zwischen -1 und +1.
- Die Kosinusbögen sind symmetrisch.
- Die Kosinuskurve ist symmetrisch zur y-Achse

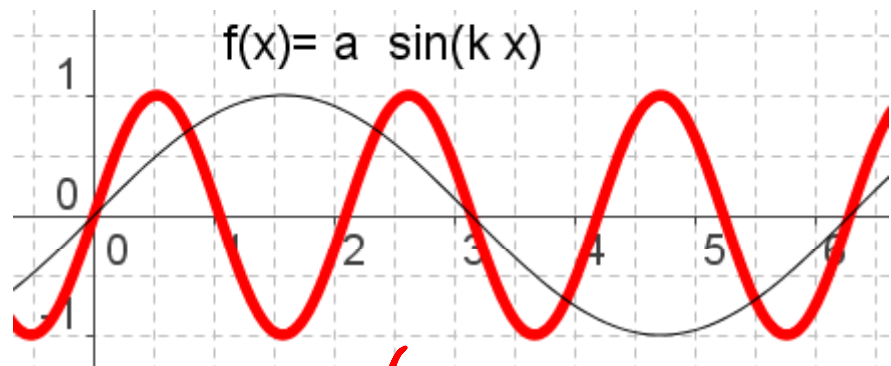


Funktionen strecken und stauchen

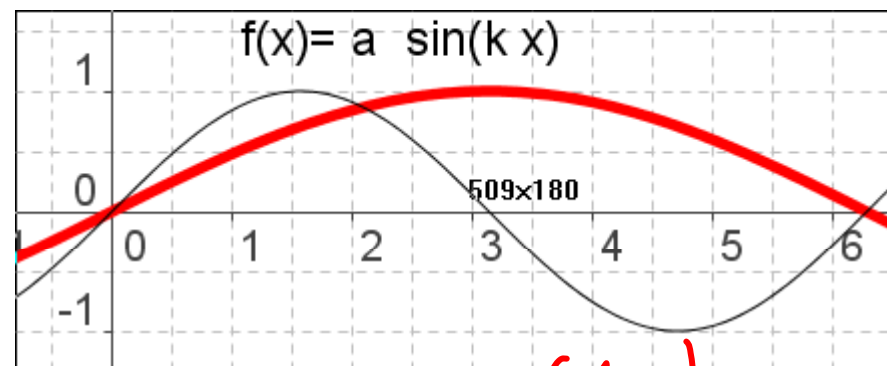
$$y = \sin(2x)$$



Ein Faktor direkt beim x sorgt für waagerechtes Strecken und Stauchen.



$$y = \sin(3x)$$

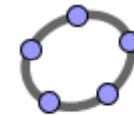
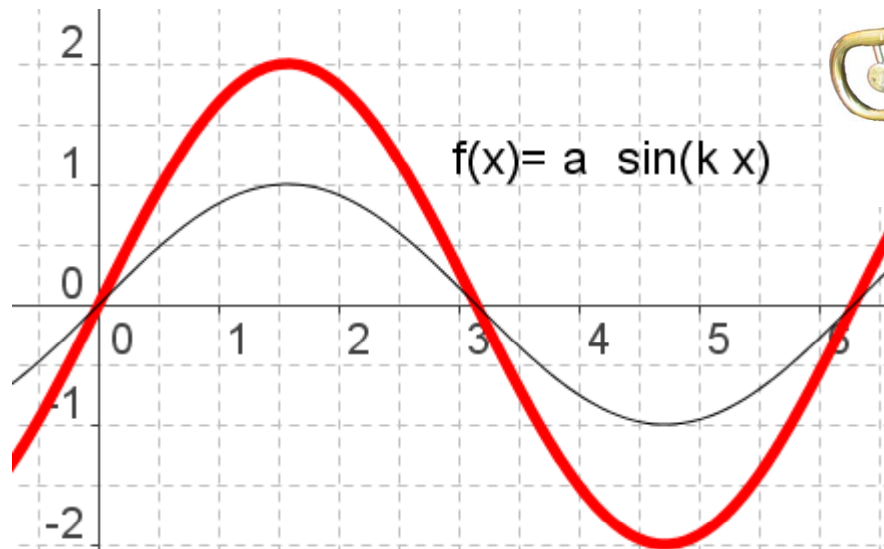


$$y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

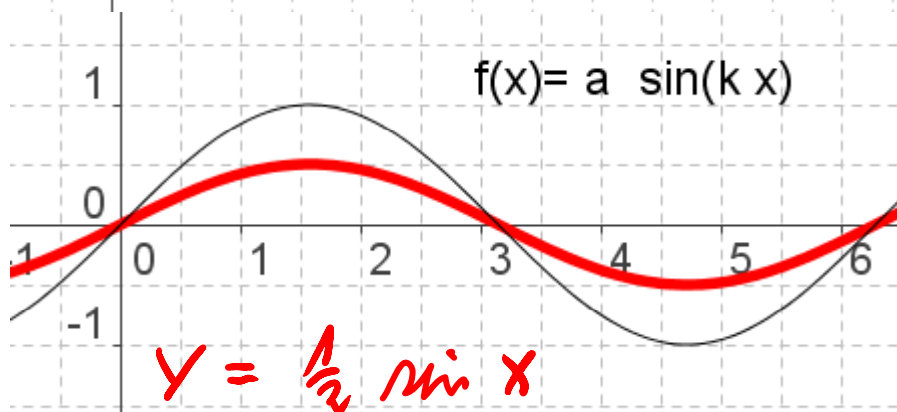
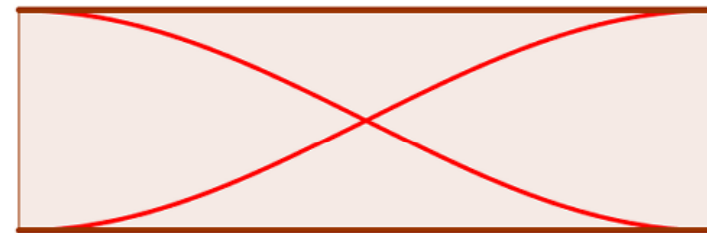
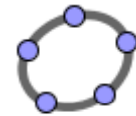


Funktionen strecken und stauchen

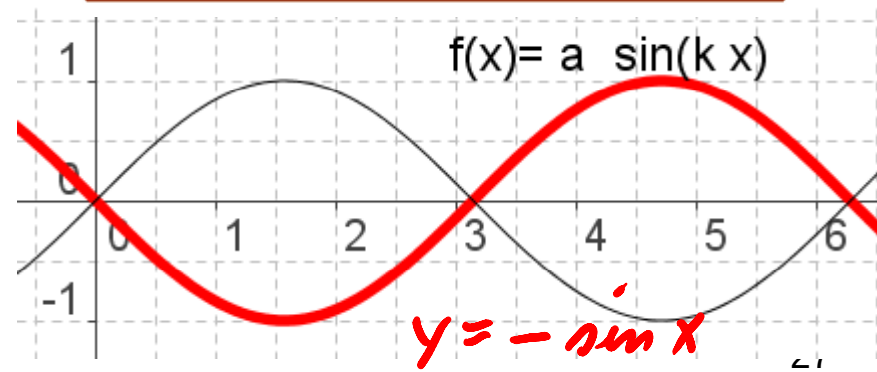
$$y = 2 \sin x$$



Posaune

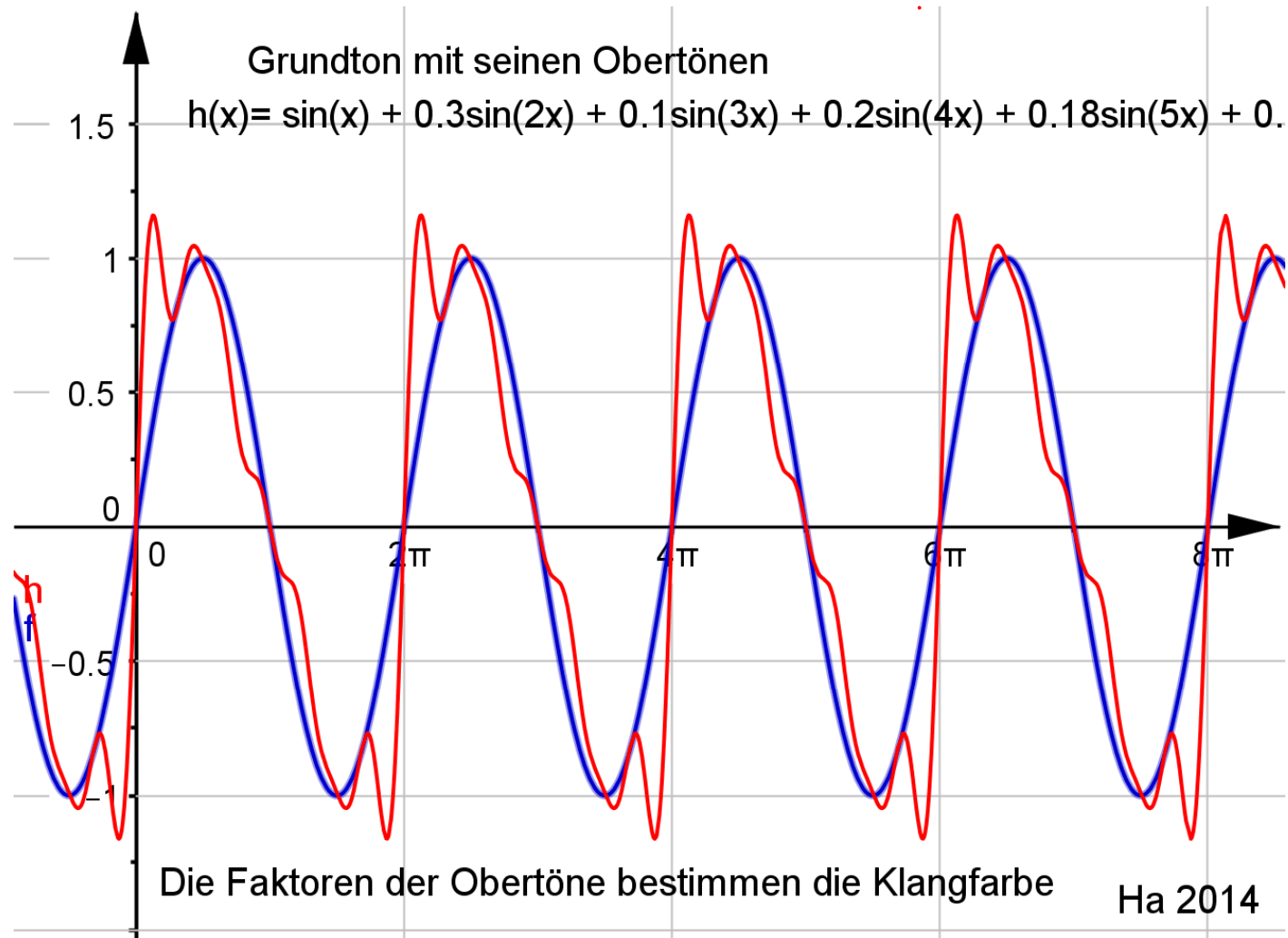
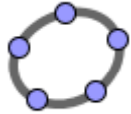


$$y = \frac{1}{2} \sin x$$

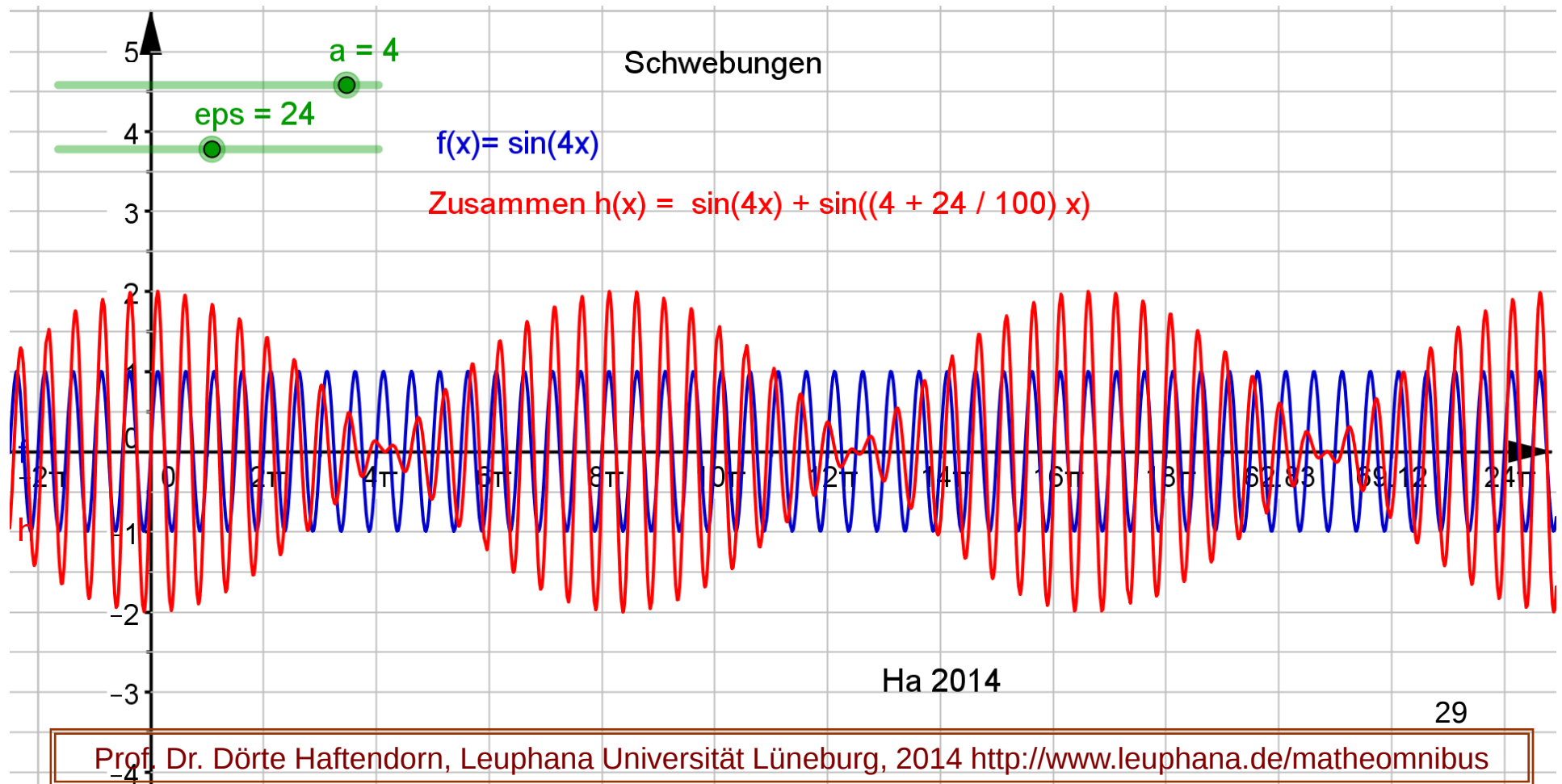
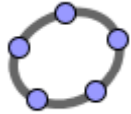


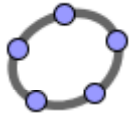
$$y = -\sin x$$

Die Klangfarbe zeigt sich durch ein anderes „Obertonspektrum“



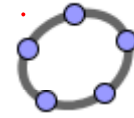
Schwebungen, sie entstehen, wenn dicht benachbarte Töne gemeinsam erklingen



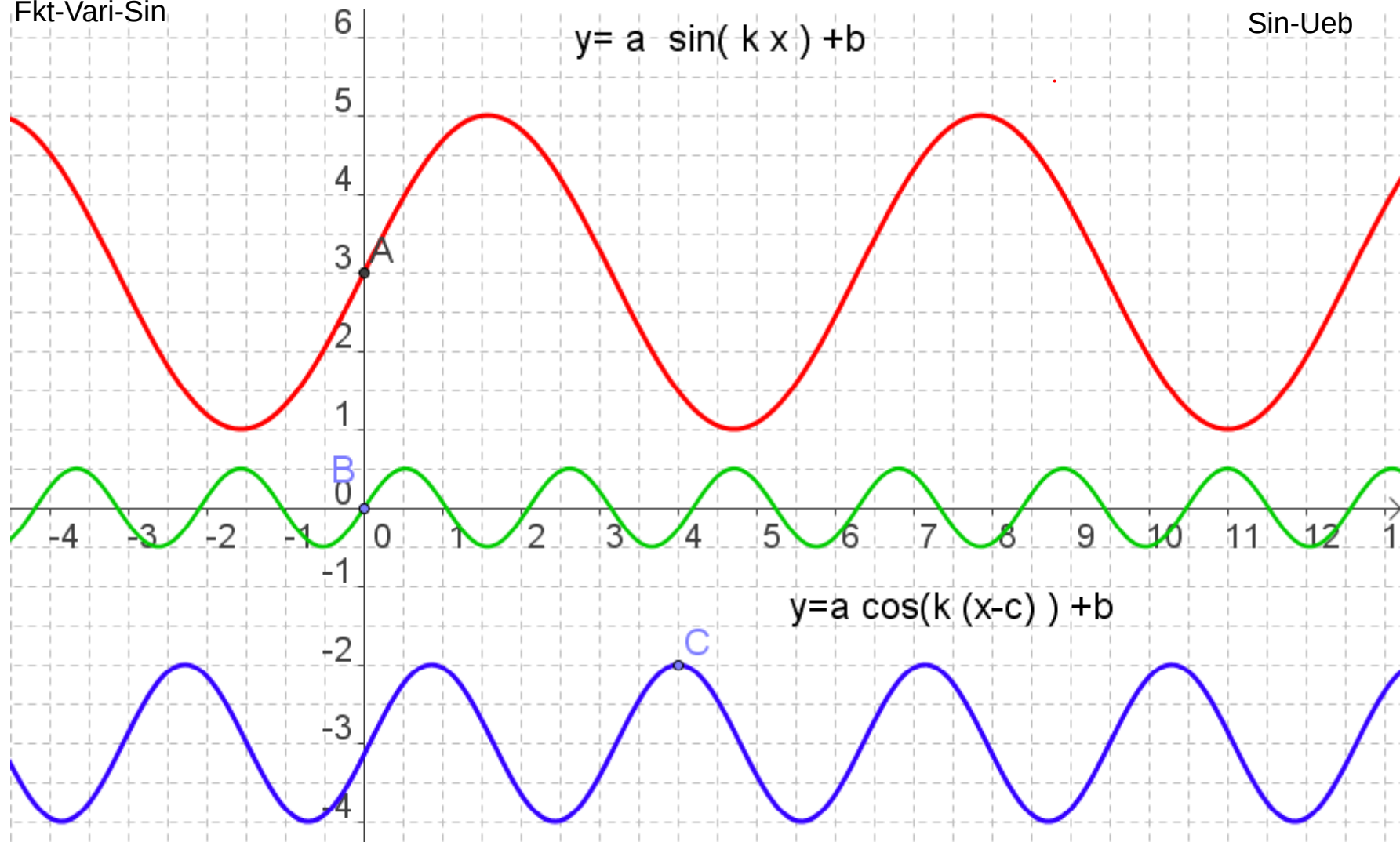


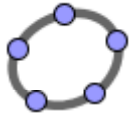
Fkt-Vari-Sin

Funktionen variieren



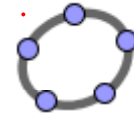
Sin-Ueb



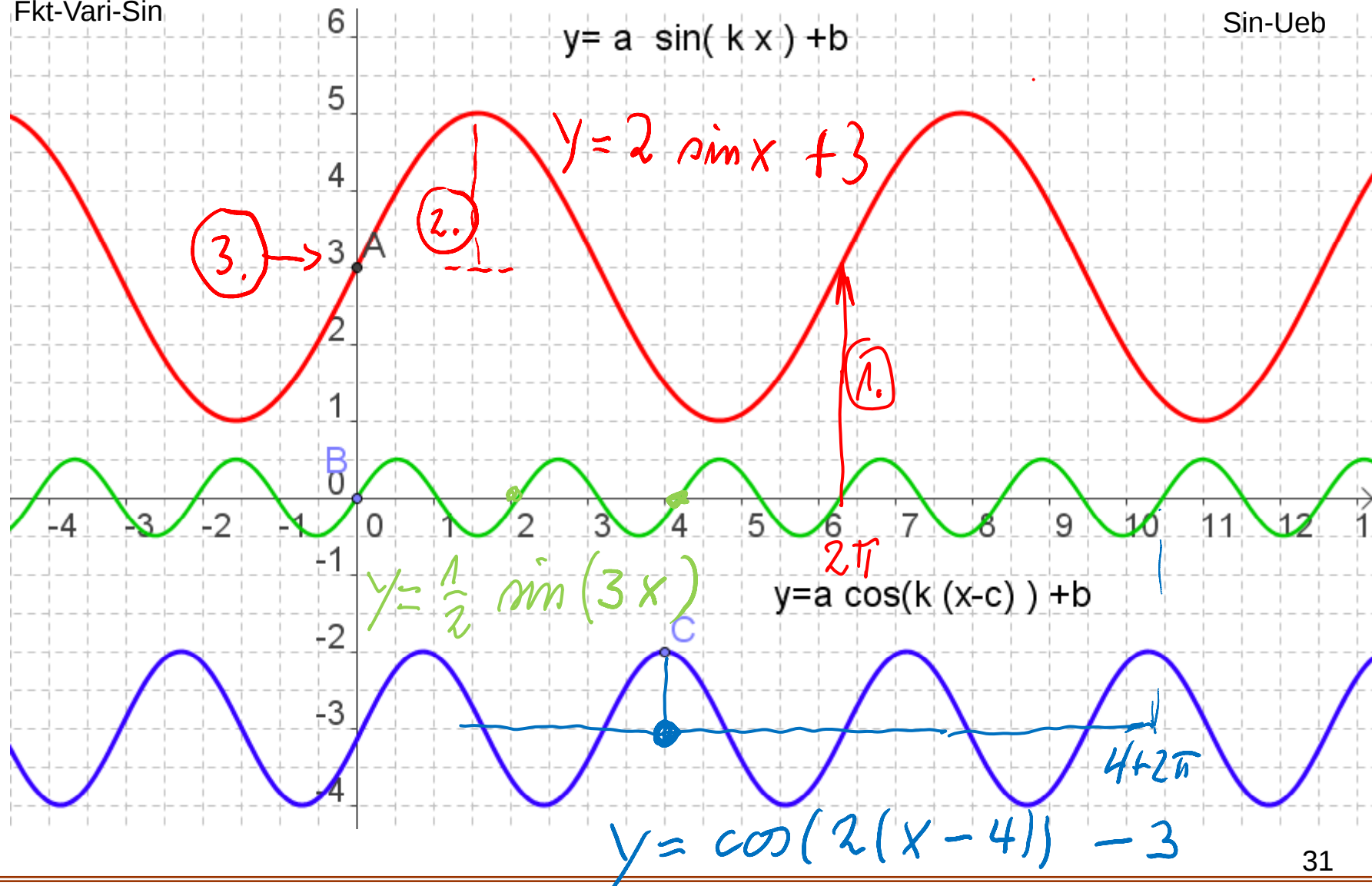


Fkt-Vari-Sin

Funktionen variieren

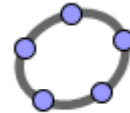


Sin-Ueb

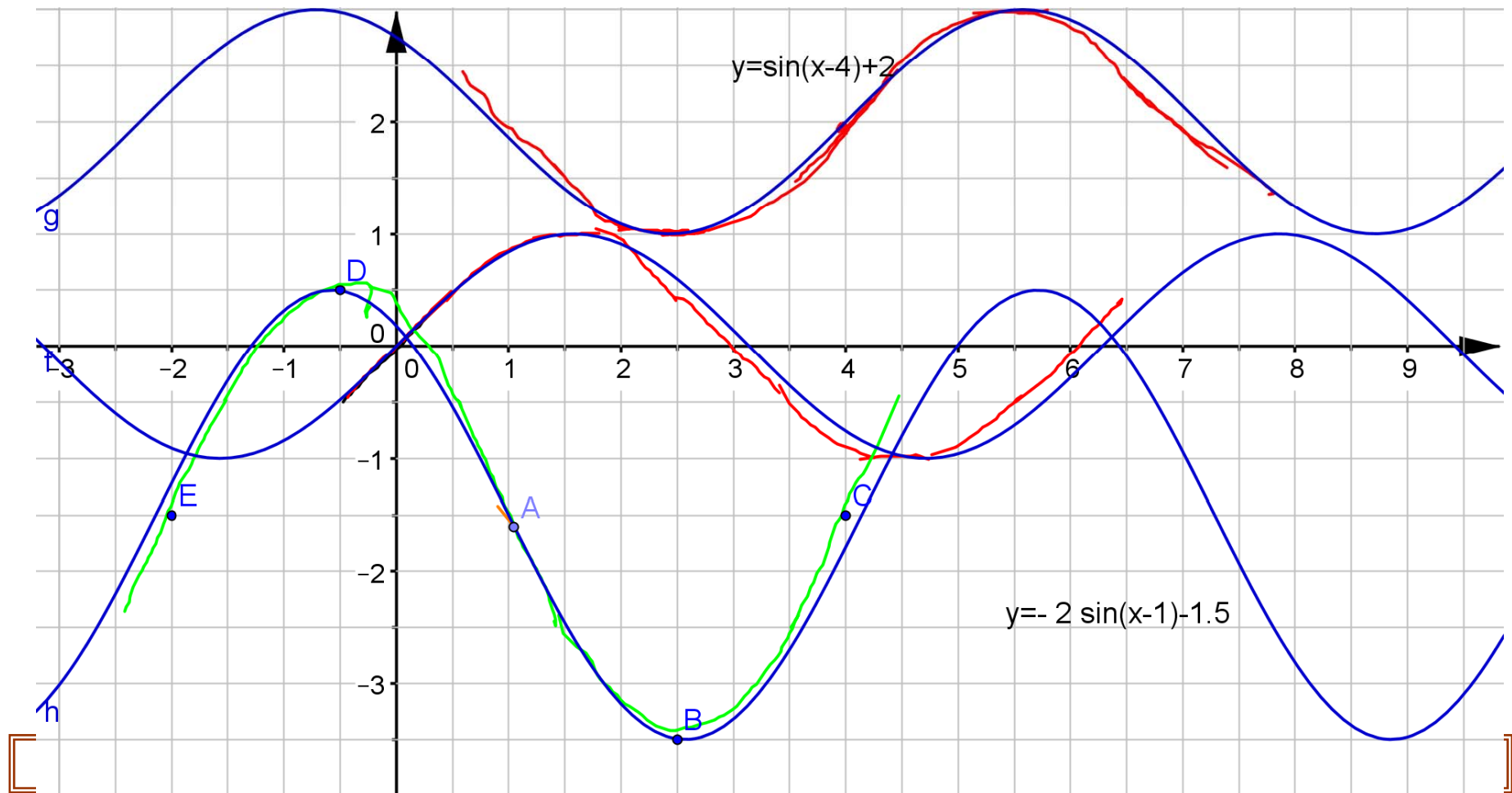
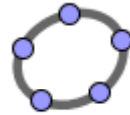


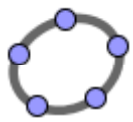
31

Sinus von hand Zeichnen



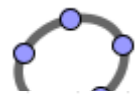
Sinus von hand Zeichnen





Hand

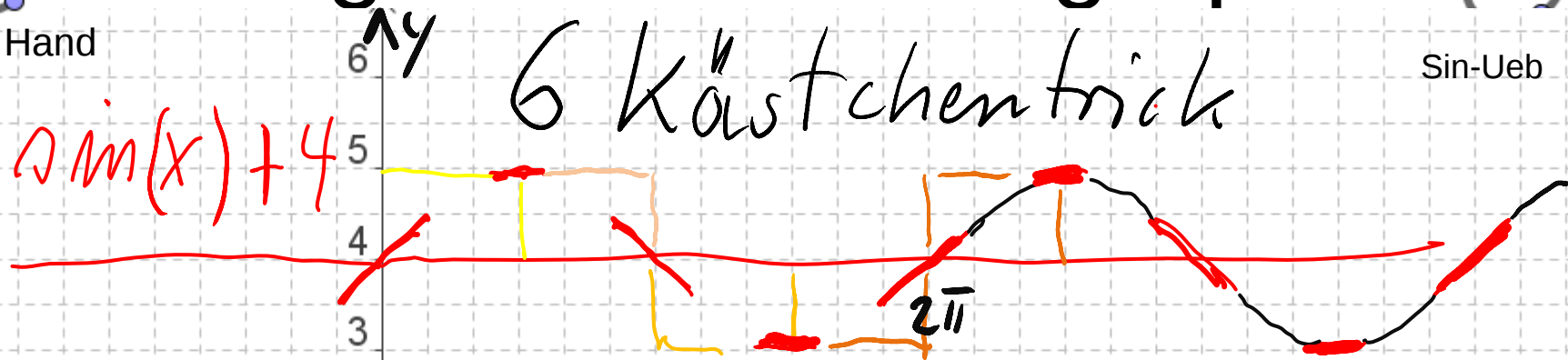
Übung mit Funktionsgraphen



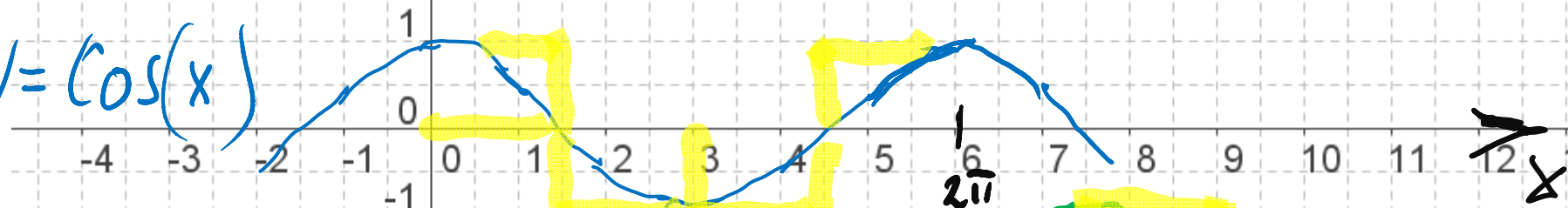
Sin-Ueb

6 Körstchen trick

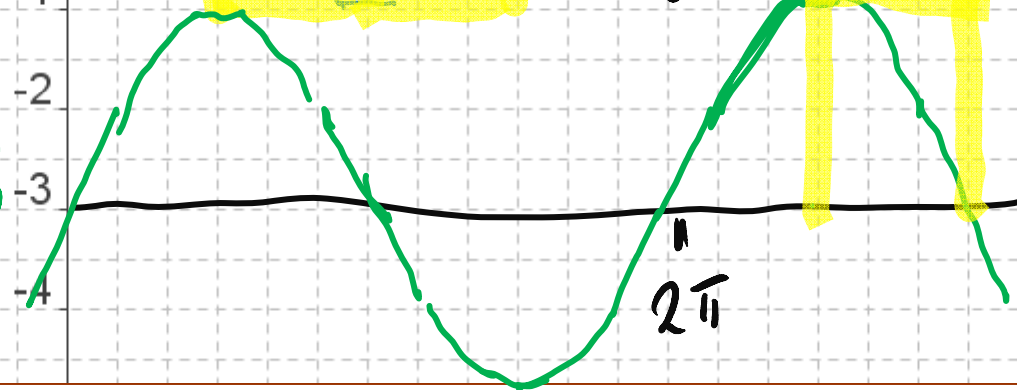
$$y = \sin(x) + 4$$



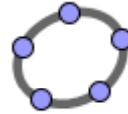
$$y = \cos(x)$$



$$y = 2\sin(x) - 3$$



Sinus strecken und stauchen



Welle

