

Stochastik: Markow-Ketten mit drei Zuständen: Wetter

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 29. November 2004

Es geht hier um Markowprozesse mit genau drei Zuständen.

Wetter-Beispiel

Drei Zustände: Sonne, Nebel, Regen

Wenn heute Sonne ist, dann ist mit 50%- Wahrscheinlichkeit auch morgen Sonne, mit 20 % W. ist Nebel, mit 30 % W. ist Regen. Wenn heute Nebel ist, dann ist mit 20% W. morgen Sonne, mit 70% W. wieder Nebel, mit 10% W. Regen,

Wenn heute Regen ist, dann ist mit 15% W. morgen Sonne, mit 75% W. Nebel, mit 10% W. wieder Regen,

nur mit 10% W. kommen sie morgen.

Beschriften sie den Zustandsgraphen.

In Markow 3x3 mit MuPAD ist dieses Beispiel ausführlich dargestellt.

Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.15 & 0.75 & 0.1 \end{pmatrix} \quad \text{Mathix ist am Freitag bei Sonne in Bad Markstein}$$

angekommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er

1. Samstag auch Sonne
2. Samstag und Sonntag Sonne
3. am Sonntag Sonne

Welche Wetterverteilung gilt für seinen ersten Sonntag?

Welche Wetterverteilung hat er bei der Abreise am folgenden Sonntag?

Welche Wetterverteilung gilt auf "lange Sicht" für Bad Markstein?

Lösungen und Erklärungen: 1. kann man ablesen, für 2. muss man zwei Wahrscheinlichkeiten multiplizieren, weil es ein "und"-Ereignis ist. Zu 3. tragen mehrere Pfade bei, daher gilt mit "heute ist Sonne":

$$P(\text{übermorgen Sonne}) = P(\text{morgen Sonne}) \cdot P(\text{auf Sonne folgt Sonne}) + P(\text{morgen Nebel}) \cdot P(\text{auf Nebel folgt Sonne}) + P(\text{morgen Regen}) \cdot P(\text{auf Regen folgt Sonne}) = 0.5 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.15 = 0.335$$

Ersichtlich kann man dies mit Matrizenmultiplikation ausrechnen

"Heute ist Sonne" wird durch $s = (1, 0, 0)$ dargestellt.

$s \cdot A = (0.5, 0.2, 0.3)$ also die erste Zeile von A, das ist die Wetterverteilung die auf einen Sonnentag folgt.

$s \cdot A \cdot A = (0.5, 0.2, 0.3) \cdot A = (0.333, 0.465, 0.2)$ ist die Wetterverteilung am darauf folgenden Tag, also übermorgen.

$s \cdot A^n$ ist die Wetterverteilung nach n Tagen, $n=9$ für die Abreise, $(0.27, 0.57, 0.15)$ gerundet, und das ist auch etwa die stabile Wetterverteilung für Bad Markstein.

Das heißt, dass er mit 27% Wahrscheinlichkeit an seinem Ankunftstag Sonne erwarten konnte.

Berechnung der der **stabilen Zustandsverteilung**:

$v \cdot A = v$ ist die Bedingung, man sagt v muss Eigenvektor zum Eigenwert 1 sein.

Das zugehörige Gleichungssystem muss man unter der weitem Bedingung lösen, dass v stochastischer Vektor sein muss (Komponentensumme 1).

