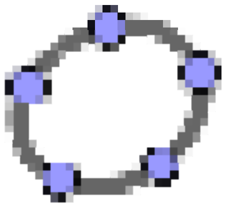
Numerik

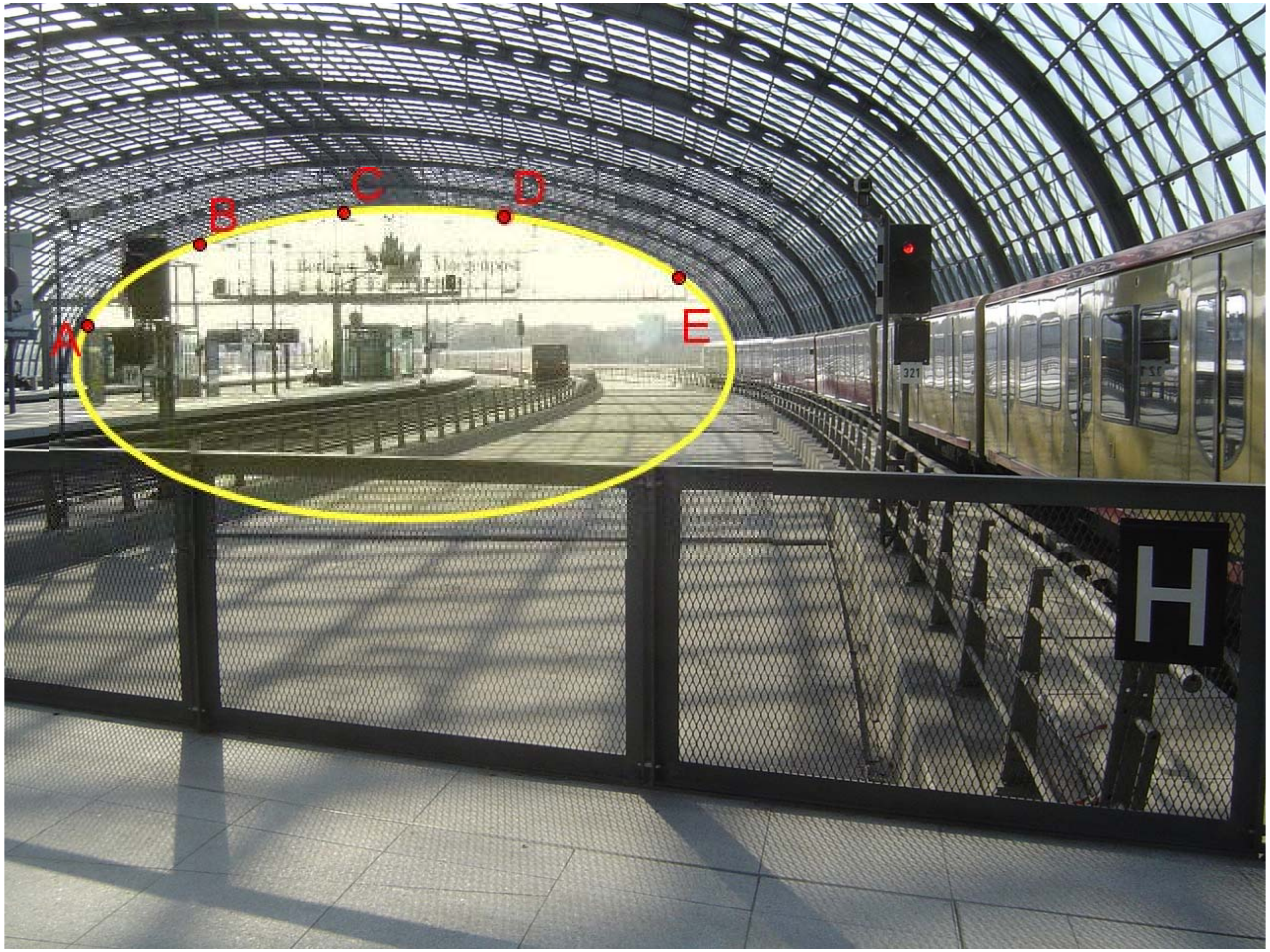
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Numerik

- Numerik bewältigt vieles in den Anwendungen
- Fallen und Fußangeln in der Numerik
- Was man exakt nicht schafft, das macht man mit Numerik
- Hauptsache, man hat wenigstens Zahlen 'raus

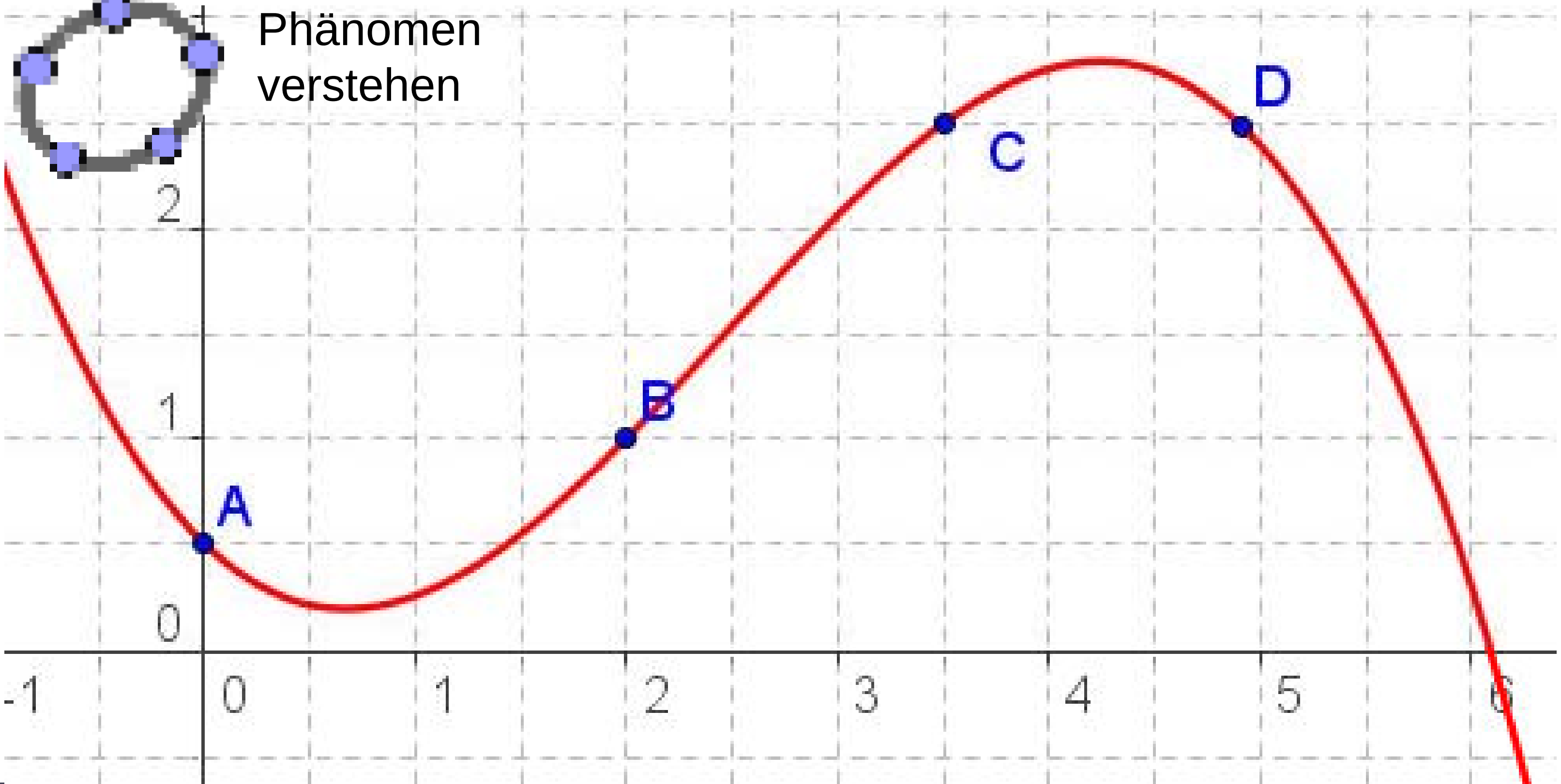
Numerik





Lagrange-Interpolation

Phänomen
verstehen



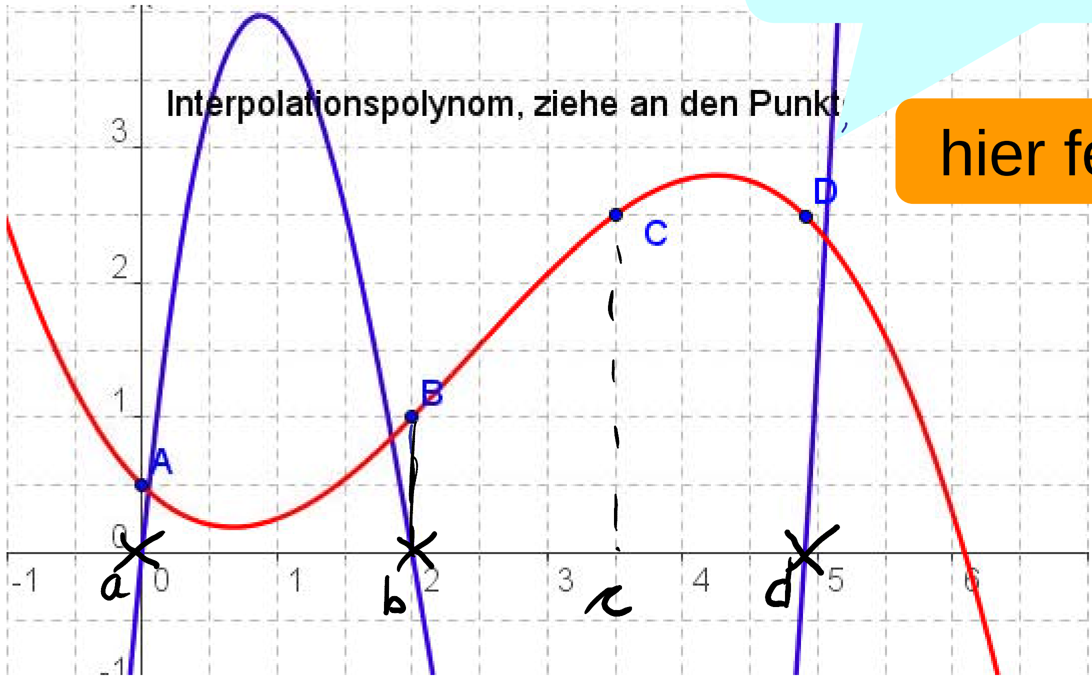
Erklärung
verstehen

p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

Lagrange-Interpolation

$$(x-a)(x-b)(x-d)$$

hier fehlt (x-c) !

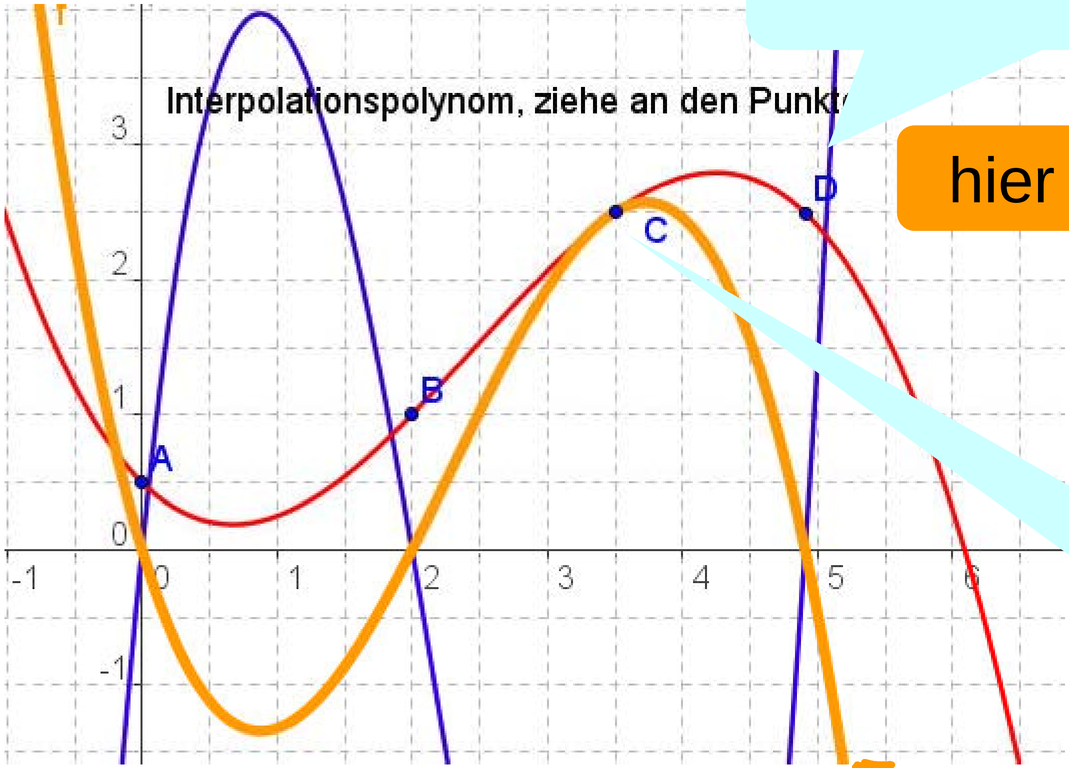


p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

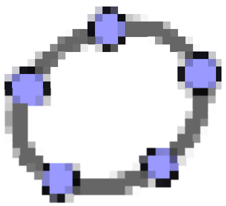
Lagrange-Interpolation

$$(x-a)(x-b)(x-d)$$

hier fehlt (x-c) !



$$\frac{y(C)}{la2(c)}$$



p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

Lagrange-Interpolation

Jeder Punkt

erzeugt einen

Baustein.

hier fehlt (x-c) !

$$\frac{y(C)}{la2(c)}$$

$$(x-a)(x-b)(x-d)$$

p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

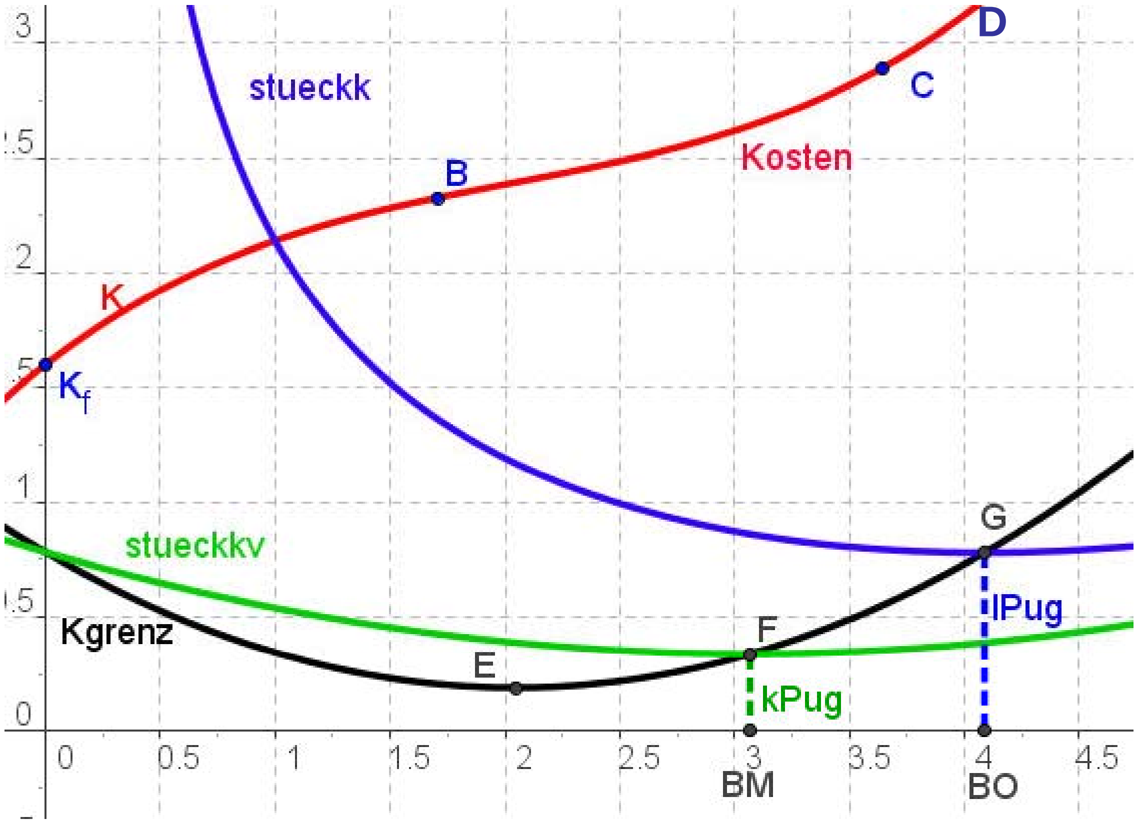
la(x) = y(A) / ((x(A) - x(B)) (x(A) - x(C)) (x(A) - x(D))) (x - x(B)) (x - x(C)) (x - x(D)) + y(B) / ((x(B) - x(A)) (x(B) - x(C)) (x(B) - x(D))) (x - x(A)) (x - x(C)) (x - x(D)) + y(C) / ((x(C) - x(A)) (x(C) - x(B)) (x(C) - x(D))) (x - x(A)) (x - x(B)) (x - x(D)) + y(D) / ((x(D) - x(A)) (x(D) - x(B)) (x(D) - x(C))) (x - x(A)) (x - x(B)) (x - x(C))

Lagrange-Algorithmus in einem Schritt aufgeschrieben.

Wirtschaftsfunktionen

mit Lagrange-Interpolation

Modelliere
die
Kostenfunktion
passend.



Kosten

Stückkosten

variable Stückkosten

Grenzkosten

BM = Betriebsminimum
BO = Betriebsoptimum
kPug= kurzfristige Preisuntergrenze
lPug= langfristige Preisuntergrenze

Wirtschaftsfunktionen

mit Lagrange-Interpolation

Wirtschaftsfunktionen. Die freie Parabel aus dem 1. Problem sei nun grenk(x), die Grenzkosten−Fkt. (Ableitung der Kostenfunktion)

Dann ist $\mathbf{kv}(x):=\int \mathbf{grenzk}(x)\,dx$ ▸ *Fertig*

$$\mathbf{kv}(x) \;▸\; \frac{4\cdot x^3}{9}-\frac{19\cdot x^2}{6}+9\cdot x$$

die Funktion der "variablen Kosten"

Für die Zeichnung sind die Fixkosten auf 5 gesetzt. $\mathbf{kf}:=5$ ▸ 5

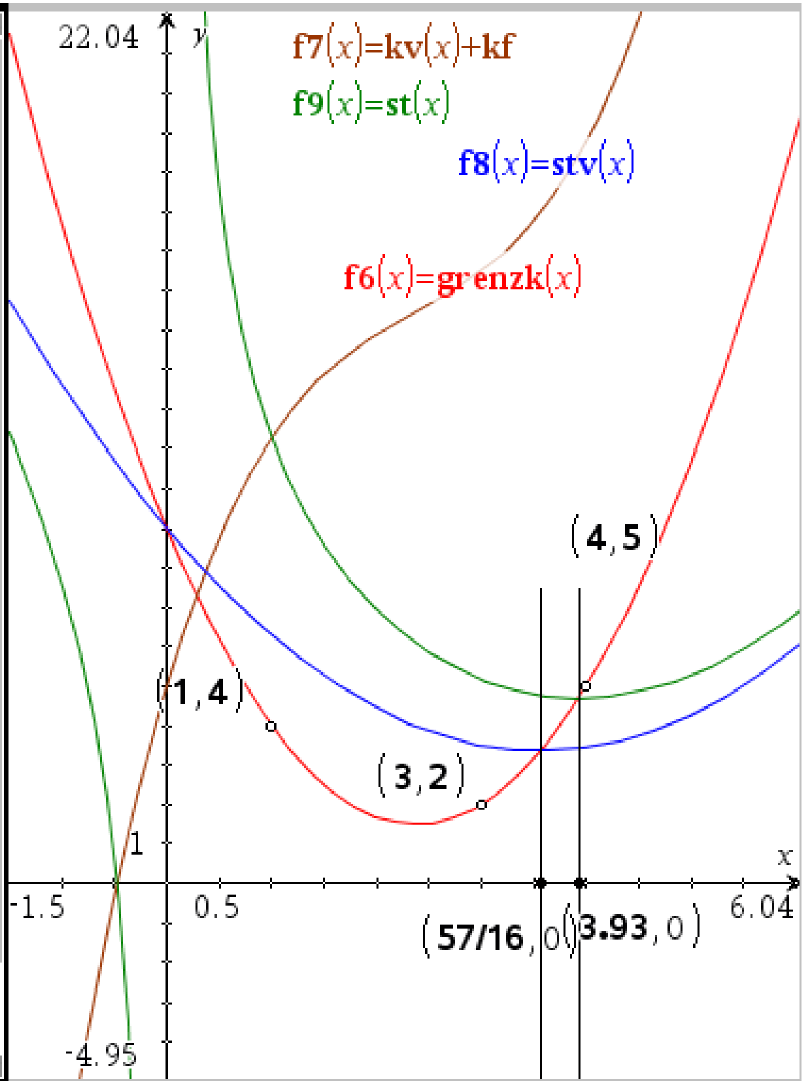
Stückkosten $\mathbf{st}(x):=\dfrac{\mathbf{kv}(x)+\mathbf{kf}}{x}$ ▸ *Fertig*

variable Stückkosten $\mathbf{stv}(x):=\dfrac{\mathbf{kv}(x)}{x}$ ▸ *Fertig*

Berechnungen nächste Seite

$\mathbf{kpug}$ ▸ $\dfrac{215}{64}$ $\mathbf{lpug}$ ▸ 4.69166

Ziehe die Hohlkreispunkte (Definitionen unten)



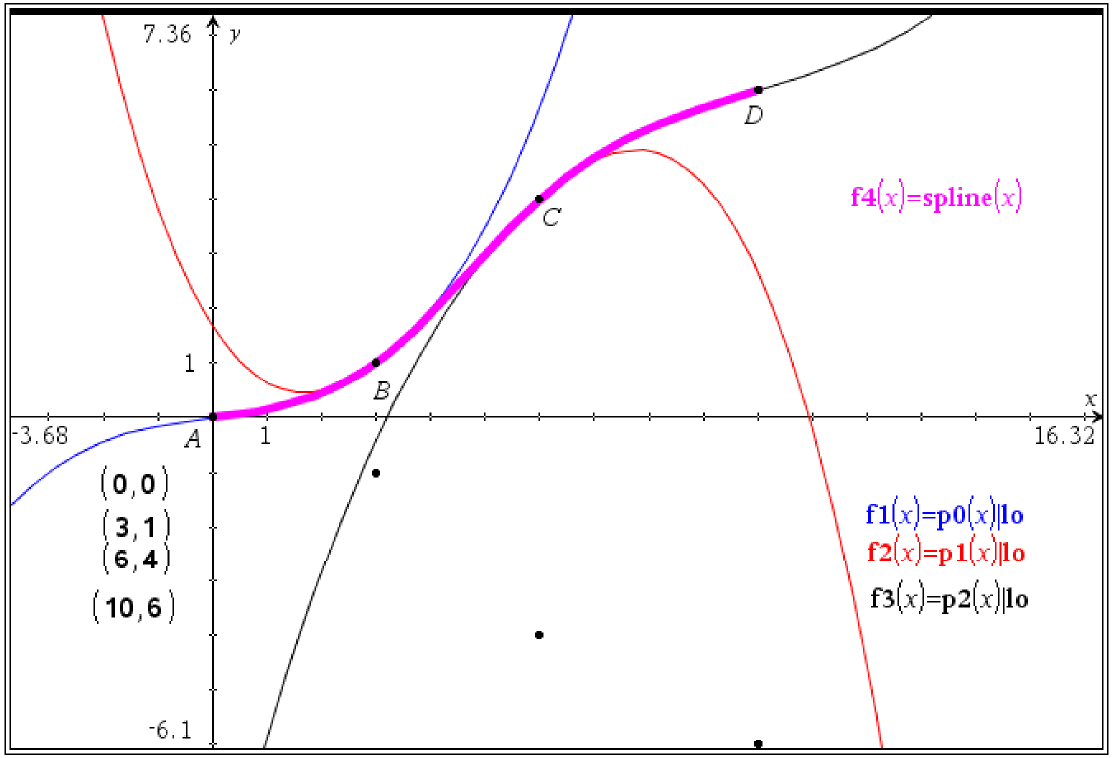
Numerik beim Bauen

Splines = Straklatten

Splines im Schiffbau

Halber Querschnitt

In gekippter Lage



$$\mathbf{p0}(x)|\mathbf{lo} \quad \blacktriangleright \quad \frac{x^3}{54}+\frac{x}{6}$$

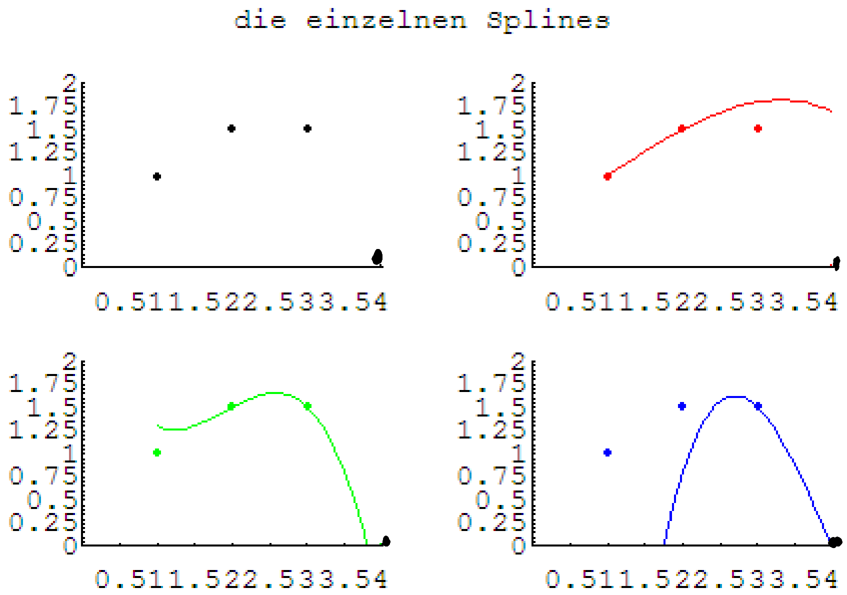
$$\mathbf{p1}(x)|\mathbf{lo} \quad \blacktriangleright \quad \frac{-x^3}{54}+\frac{x^2}{3}-\frac{5\cdot x}{6}+1$$

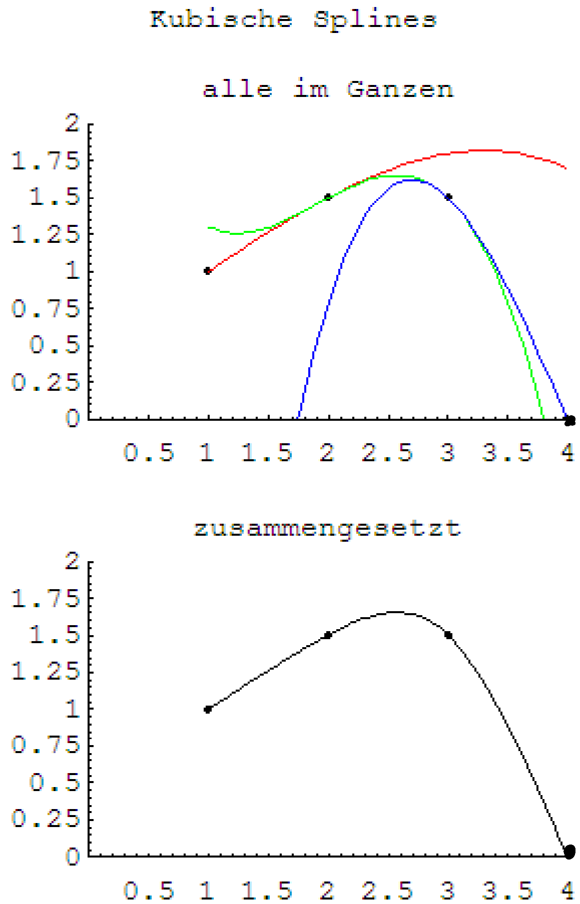
$$\mathbf{p2}(x)|\mathbf{lo} \quad \blacktriangleright \quad \frac{-x^3}{24}+\frac{3\cdot x^2}{4}-\frac{10\cdot x}{3}+6$$

$$\mathbf{lo}:=\text{solve}(\{\mathbf{gl0},\mathbf{gl1},\mathbf{gl2},\mathbf{gl3},\mathbf{gl4},\mathbf{gl5},\mathbf{gl6}\},\{b0,d0,b1,c1,d1,b2,d2\})$$

$$\blacktriangleright \; b0=\frac{1}{6} \text{ and } b1=\frac{2}{3} \text{ and } b2=\frac{7}{6} \text{ and } c1=\frac{1}{6} \text{ and } d0=\frac{1}{54} \text{ and } d1=\frac{-1}{54} \text{ and } d2=\frac{-1}{24}$$

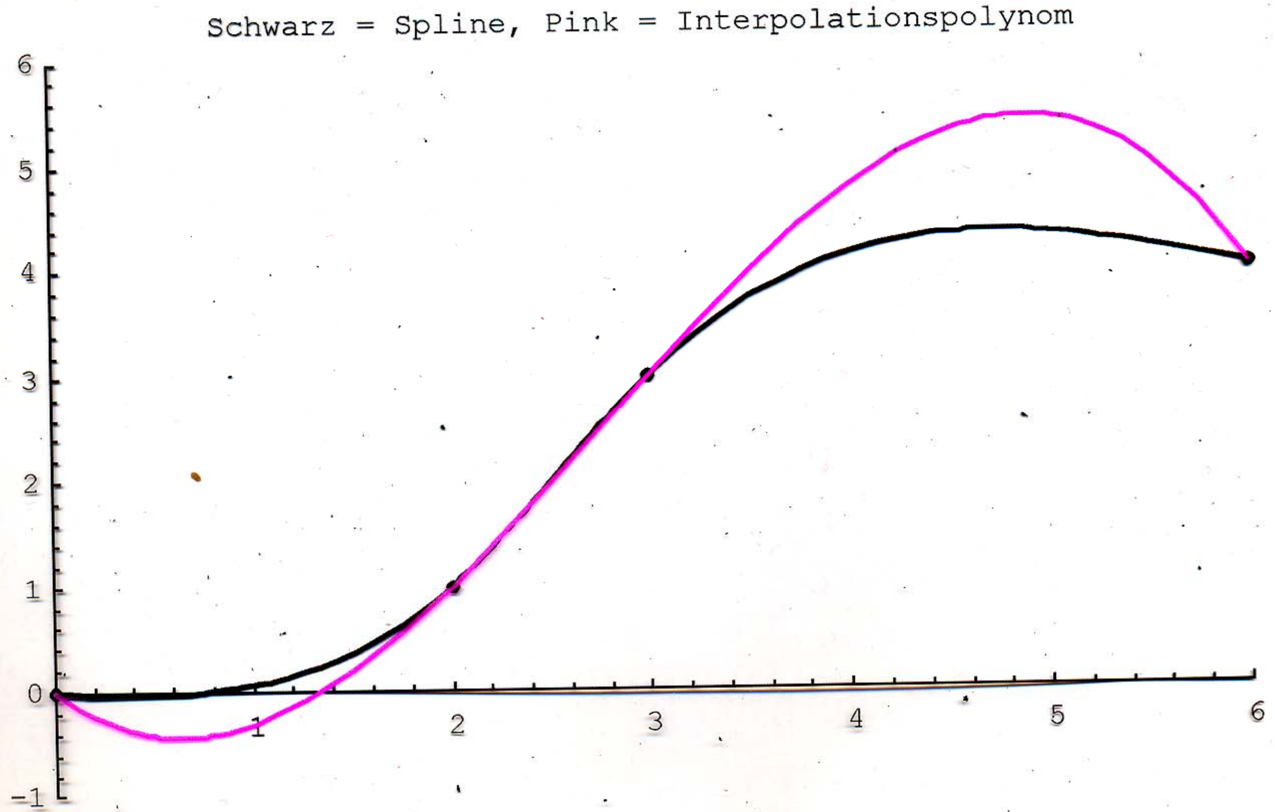
Kubische Splines





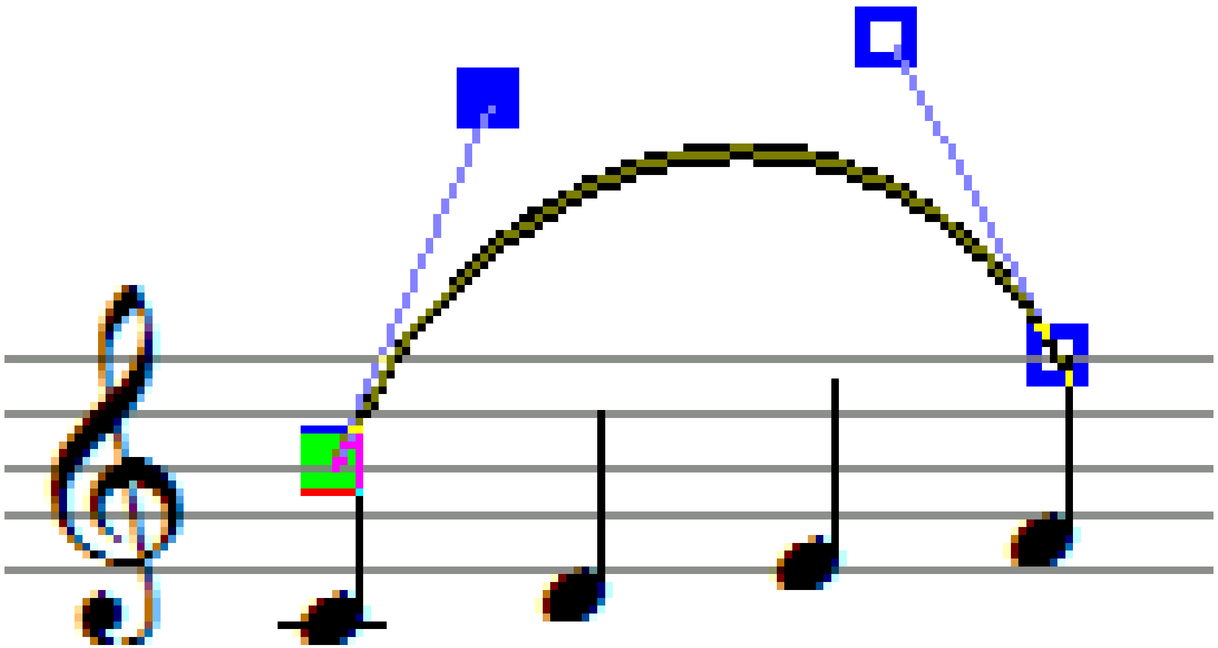
- Vier „Nägel“ markieren die Form.
- Von einem zum nächsten legt man ein Polynom 3. Grades (daher „kubisch“).
- Man sorgt für gute Übergänge
- und fügt alle passend zusammen.

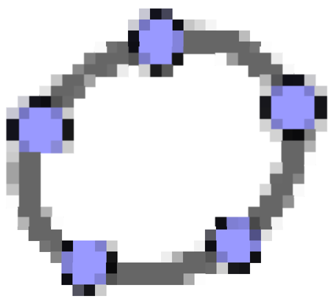
Splines als Formkonzept

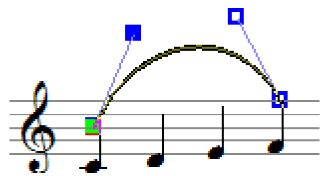


Facit: Weil Polynome sehr starke "Formgesetze" haben, (siehe Affenkästen), erzeugen in der Numerik unerwünschtes "Ausschwingen".

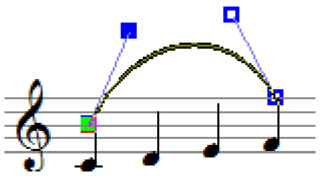
Bézier-Splines

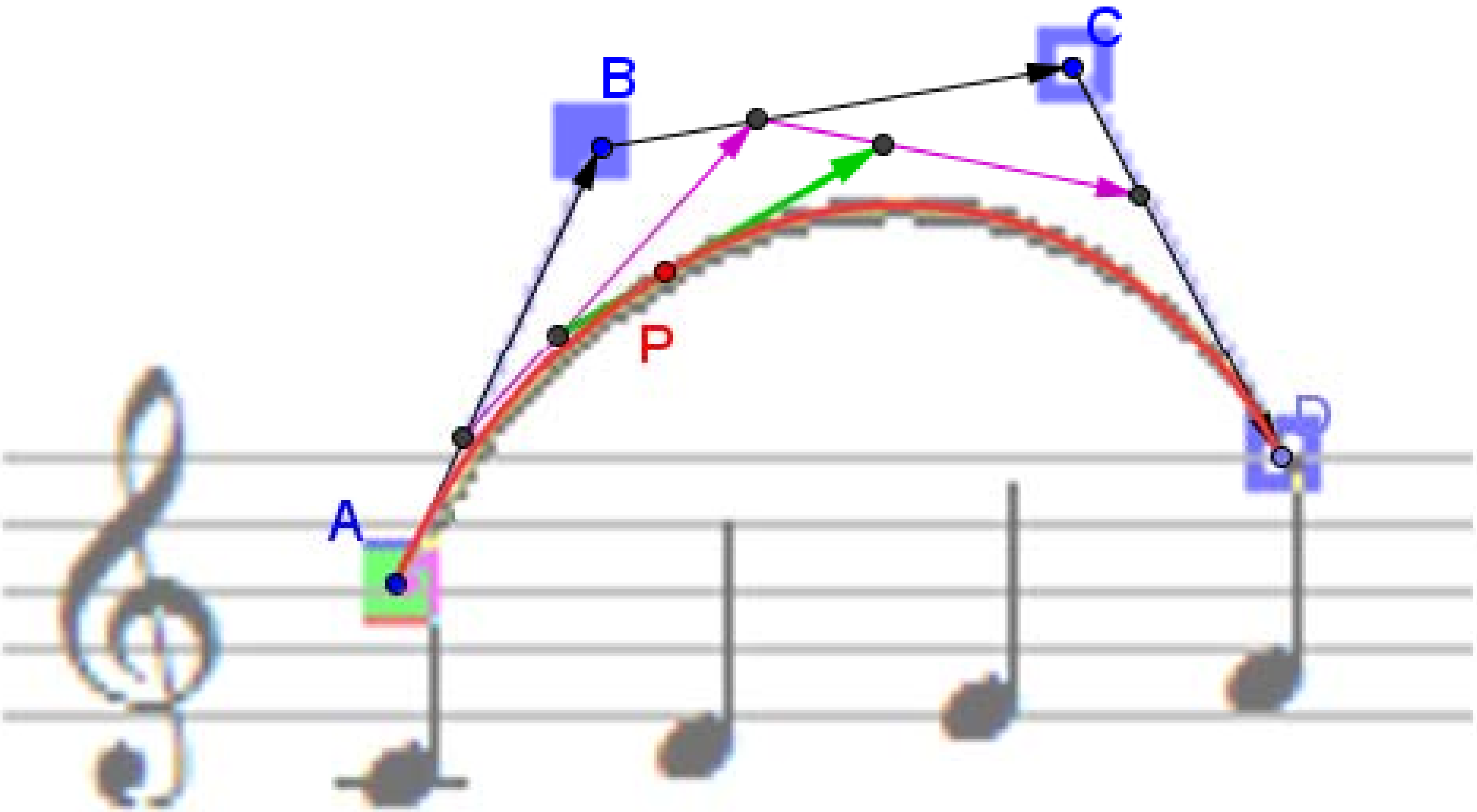






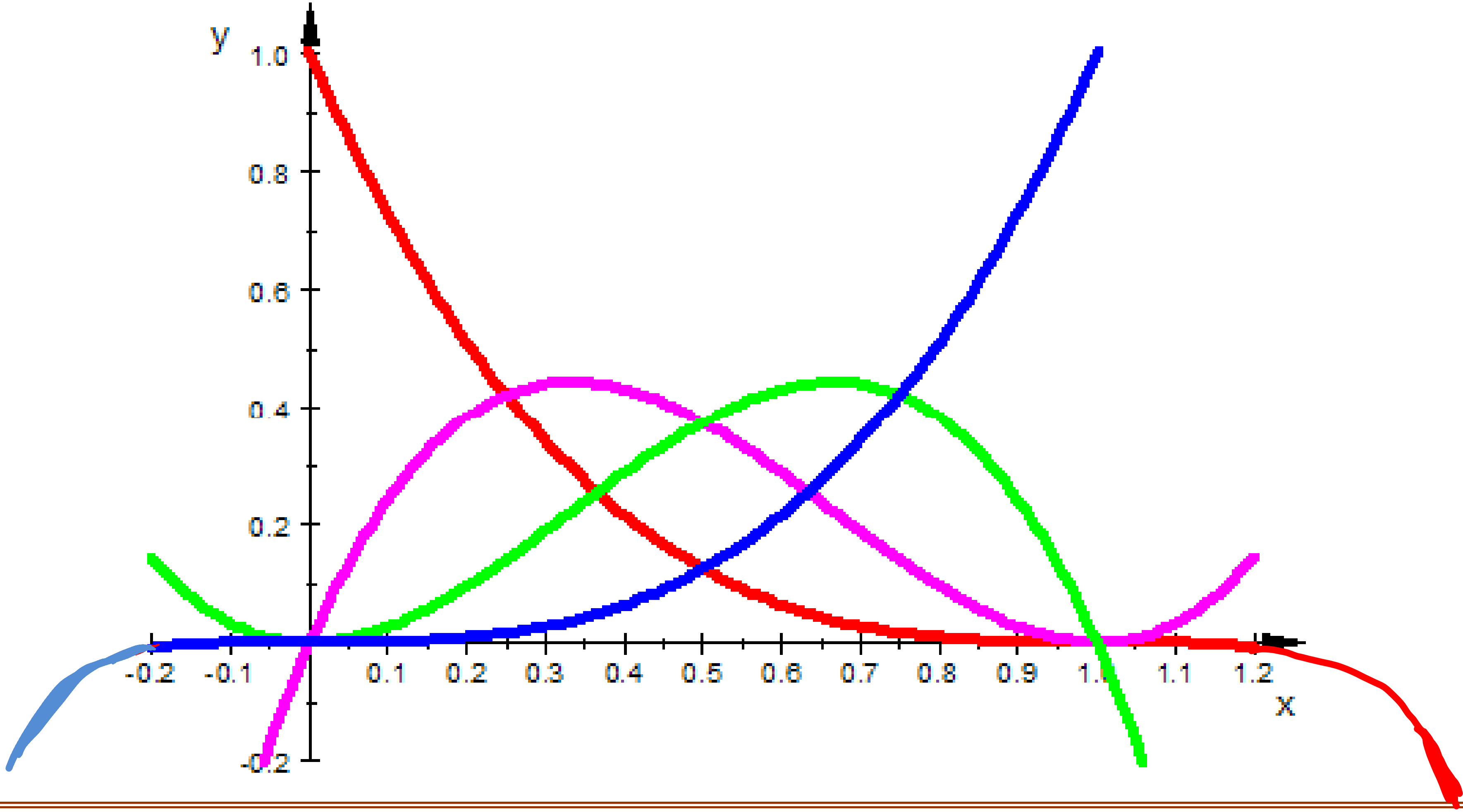
Bézier-Splines





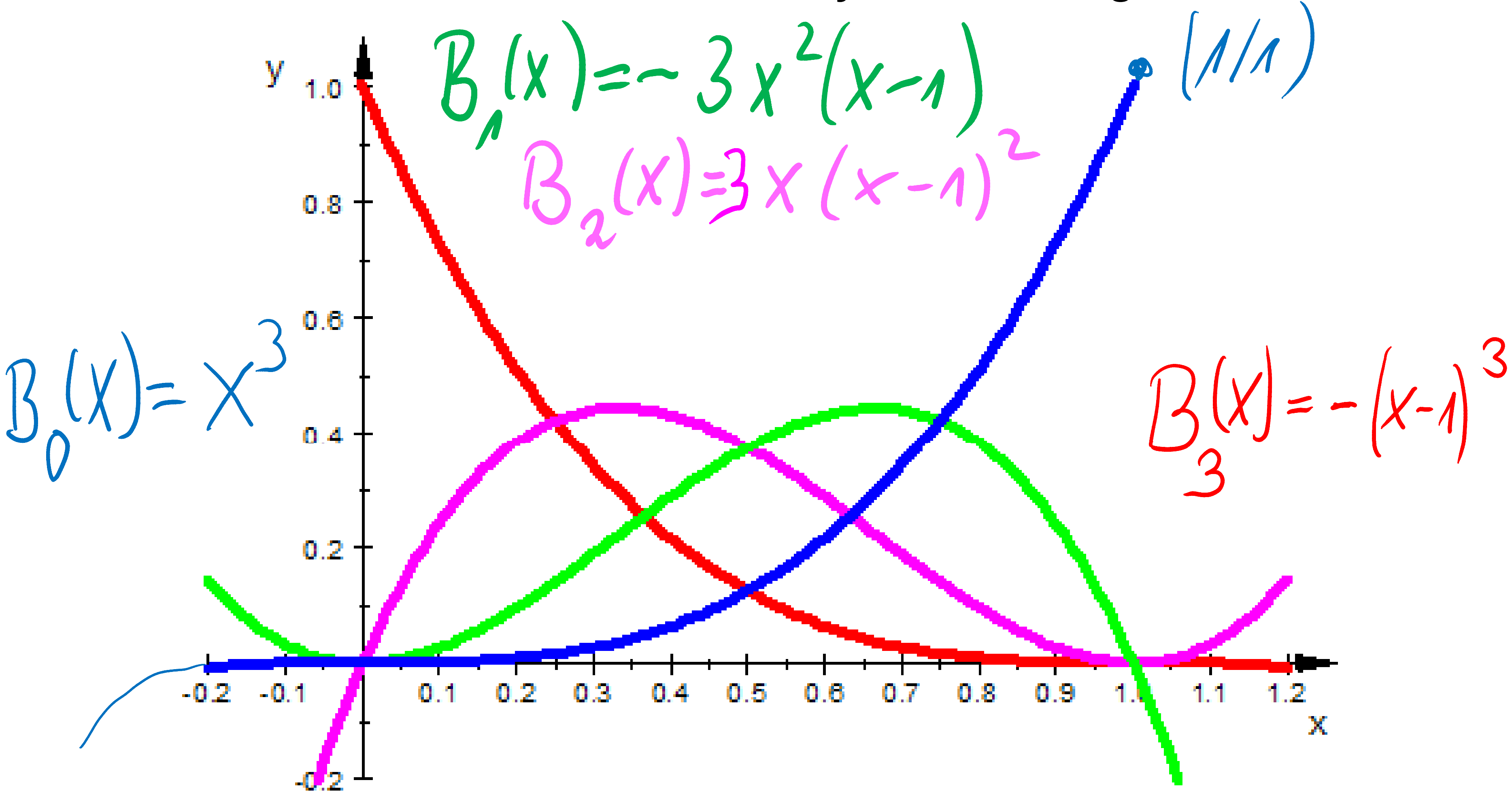
Bézier-Splines

Sie sind aus Bernstein-Polynomen aufgebaut.



Bézier-Splines

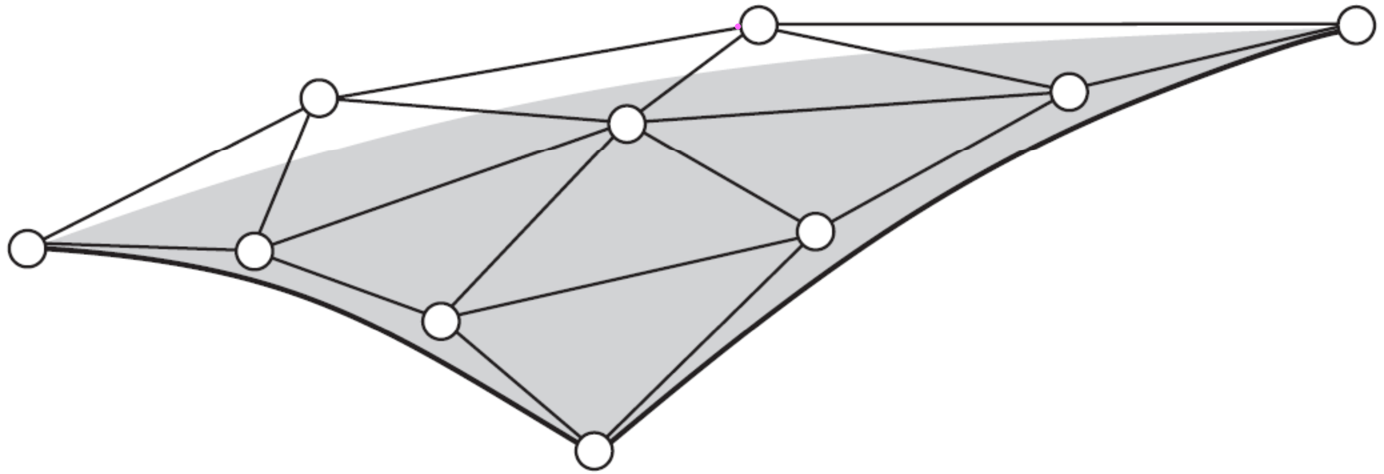
Sie sind aus Bernstein-Polynomen aufgebaut.



Bézier-Splines

Von Pierre Étienne Bézier um 1960 für Renault entwickelt.

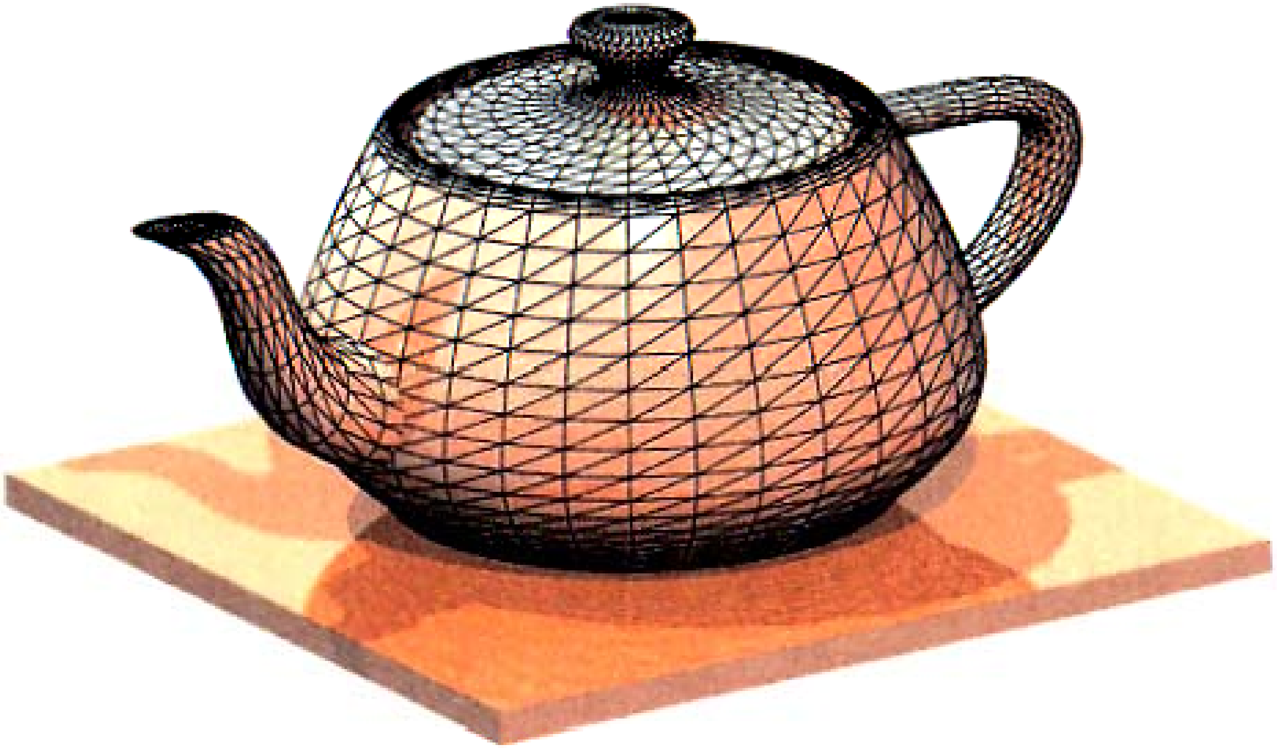
Bézier gilt als Begründer von CAD und CAM.



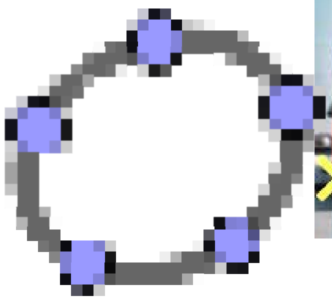
Bézierfläche über einem dreieckigen Parametergebiet mit ihrem Bézier-Netz

De Casteljau entwickelte entsprechendes für Citroen, durfte es aber nicht veröffentlichen.

CAD
Computer Aided Design



CAD
Computer Aided Design



Fallen und Fußangeln in der Numerik

Mit welcher Maschinengenauigkeit arbeitet Ihr Taschenrechner?

$$1+10^{-10}=erg,\quad erg-1=\ldots\ldots e_{10}$$

$$1+10^{-11}=erg,\quad erg-1=\ldots\ldots e_{11}$$

$$1+10^{-12}=erg,\quad erg-1=\ldots\ldots e_{12}$$

$$1+10^{-13}=erg,\quad erg-1=\ldots\ldots e_{13}$$

$$1+10^{-14}=erg,\quad erg-1=\ldots\ldots e_{14}$$

=0 ?

Die Maschinengenauigkeit MG ist die kleinste Zahl, deren Addition zu 1 von der Maschine noch gemerkt wird.

Ist e_{12} ungleich 0 aber e_{13} =0, dann ist MG=10^{-12}

Grundlagen der Numerik mit Computer

$100\sqrt{2}$ exakt

$141{,}421$ 3 Nachkommastellen, 6 tragende Ziffern

$0{,}00\underbrace{141421}_{\text{Mantisse}}\cdot 10^{5}$ 8 Nachkommastellen, 6 tragende Ziffern

Exponent

Grundlagen der Numerik mit Computer

Gleitpunktzahl = floatingpoint number

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

Vor-zeichen-bit

11 Bit für den Exponenten

52 Bit für die Mantisse

64 Bit für eine Kommazahl

das sind 8 Byte

Das sind dann etwa 16 dezimale Stellen für die Mantisse

Die Zehnerpotenzen laufen etwa von 10^{+300} bis 10^{-300}.

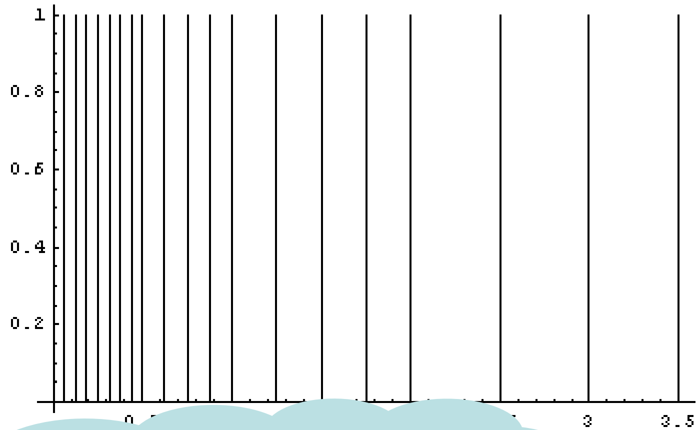
Grundlagen der Numerik mit Computer

Gleitpunktzahl = floatingpoint number

0	101 0010 0001	0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

Das sind dann etwa 16 dezimale Stellen für die Mantisse

Die Zehnerpotenzen laufen etwa von +300 bis -300



Die Abstände zwischen den darstellbaren Zahlen werden immer größer.

Unterscheiden sich zwei große Zahlen erst nach mehr als 16 Stellen kann ihre Differenz nicht ordentlich berechnet werden.

Differenz-katastrophe

Fallen und Fußangeln in der Numerik

Beispiel für falsche Berechnungen
(Kulisch, Miranker[270]) http://www.logic.at/people/schuster/c01_0000.htm

$$-\frac{x^5 \cdot 2}{107751} + \frac{x^3}{35917} + \frac{1682 \cdot x \cdot y^4}{107751} + \frac{29 \cdot x \cdot y^2}{107751} + \frac{832}{107751}$$

Alle drei CAS-Werkzeuge liefern bei Eingabe von Naturlichen Zahlen für x und y das exakte Ergebnis 1783. Sie rechnen dann nämlich exakt mit der Bruchrechnung.

Zwingt man aber die Syteme, mit Kommazahlen zu rechnen, indem man *.0 bei wenigstens einer der Zahlen schreibt, kommen abenteuerlich falsche Ergebnisse heraus.

Auch dieses ist ein **Beispiel für eine Differenzkatastrophe**
Der x^5-Term ist nämlich negativ.

Vergleich der positiven und negativen Termteile	`neg = 2*x^5 /. {x → 192119201, y -> 35675640}`
	`pos = 1682*x*y^4 + 3*x^3 + 29*x*y^2 + 832 /. {x → 192119201, y -> 35675640}`
	523 460 426 438 903 561 672 655 644 813 075 853 992 002
	523 460 426 438 903 561 672 655 644 813 076 046 112 035
	`(pos - neg) / 107751`
	1783
	pos und neg stimmen in 32 Stellen überein.

Fallen und Fußangeln in der Numerik

z=	$-\frac{2 \cdot x^5}{107751}+\frac{x^3}{35917}+\frac{1682 \cdot x \cdot y^4}{107751}+\frac{29 \cdot x \cdot y^2}{107751}+\frac{832}{107751}$

Mathematica	`z = (1682*x*y^4+3*x^3+29*x*y^2-2*x^5+832)/107751`
	$\frac{832+3x^3-2x^5+29xy^2+1682xy^4}{107751}$
	`z /. {x → 192119201, y -> 35675640}`
	`z /. {x → 192119201.0, y -> 35675640.0}`
	1783
	7.18056×10^{20}

MuPAD	`z|{x=192119201,y=35675640}`
	1783
	`z|{x=192119201.0,y=35675640.0}`
	$2.882303762 \cdot 10^{17}$

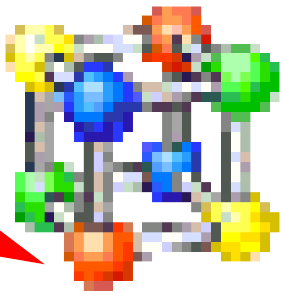
TI Nspire	$z:=\frac{1682 \cdot x \cdot y^4+3 \cdot x^3+29 \cdot x \cdot y^2-2 \cdot x^5+832}{107751}$ z|x=192119201 and y=35675640 ▸ 1783 z|x=192119201 and y=35675640. ▸ 9.28065632802E22

Fallen und Fußangeln in der Numerik

$$-\frac{x^5\cdot 2}{107751}+\frac{x^3}{35917}+\frac{1682\cdot x\cdot y^4}{107751}+\frac{29\cdot x\cdot y^2}{107751}+\frac{832}{107751}$$

für $x = 192119201$ $y = 35675640$

Das war eine Differenzkatastrophe



Fallen und Fußangeln in der Numerik

$$\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y} \blacktriangleright \text{true},$$

Das ist eine wahre Aussage, wie man mit der 3. binomischen Formel

$x^2 - y^2 = (x-y)\cdot(x+y)$ erkennt.

Das erkennen alle CAS-Werkzeuge.

$\frac{100}{1011}$	0
$\frac{1000}{100011}$	0
$\frac{10000}{10000011}$	0
$\frac{100000}{1000000011}$	0
$\frac{1000000}{100000000011}$	0

$$\mathbf{a}(i):=(10)^{i}+(10)^{-i} \quad \mathbf{b}(i):=(10)^{-(i+1)}$$

Setzt man für x=a und y=b das Obige ein, so ergibt sich für die linke Seite „Tannenbaumliste", ebenso für die rechte Seite und für die Differenz der Seiten logischerweise immer die Null.

$$\mathbf{a}(i):=(10.)^{i}+(10.)^{-i} \quad \mathbf{b}(i):=(10.)^{-(i+1)}$$

Zwingt man aber das System durch die Dezimalpunkte Kommazahlen zu verwenden, also numerisch zu arbeiten, haben alle Systeme grobe Fehler.

Fallen und Fußangeln in der Numerik

Für i von 1 bis 10 ergibt sich:

MuPAD	Mathematica	TI Nspire
$-6.776263578 \cdot 10^{-21}$ $-8.470329473 \cdot 10^{-22}$ $-2.117582368 \cdot 10^{-22}$ $-6.6174449 \cdot 10^{-24}$ 0 0 $6.462348536 \cdot 10^{-27}$ $-8.077935669 \cdot 10^{-28}$ 0 0	$\{1.38778 \times 10^{-17}\}$ $\{0.\}$ $\{0.\}$ $\{0.\}$ $\{1.69407 \times 10^{-21}\}$ $\{0.\}$ $\{0.\}$ $\{1.65436 \times 10^{-24}\}$ $\{0.\}$ $\{-1.29247 \times 10^{-26}\}$	$\text{seq}\left(\frac{a(i)-b(i)}{(a(i))^2-(b(i))^2}=\frac{1}{a(i)+b(i)}, i, 1, 10\right)$ {true,true,false,true,true,true,true,true,true,true} Nanu? Bei i=3 soll das falsch sein?? Differenz in Zahlenwerten: {0.,0.,-1.E-17,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.} Man darf nun nicht glauben, der TI Nspire wäre für die großen i besser, er steigt nämlich einfach aus genauerer Berechnung aus. Also: Dass hier nicht überall Null herauskommt, liegt an der **floating- point-Arithmetik**

Über all müsste 0 stehen, **dieser Fehler heißt Differenzkatastrophe**

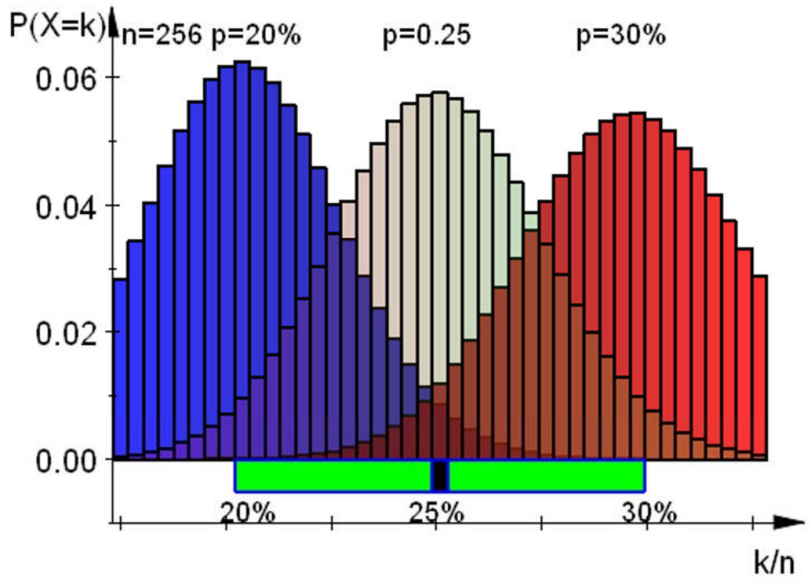
Fallen und Fußangeln in der Numerik

Konfidenzintervall

$$\mathbf{gl} := \left|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}} - p\right| \le \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{n}} \cdot \sqrt{\mathbf{n} \cdot p \cdot (1-p)} \qquad \mathbf{n} := 101$$

$$\mathbf{gl} \quad \frac{|101 \cdot p - 51|}{101} \le \frac{2 \cdot \sqrt{-101 \cdot p \cdot (p-1)}}{101}$$

$$\text{solve}(\mathbf{gl}, p) \quad 0.407176 \le p \le 0.6023$$

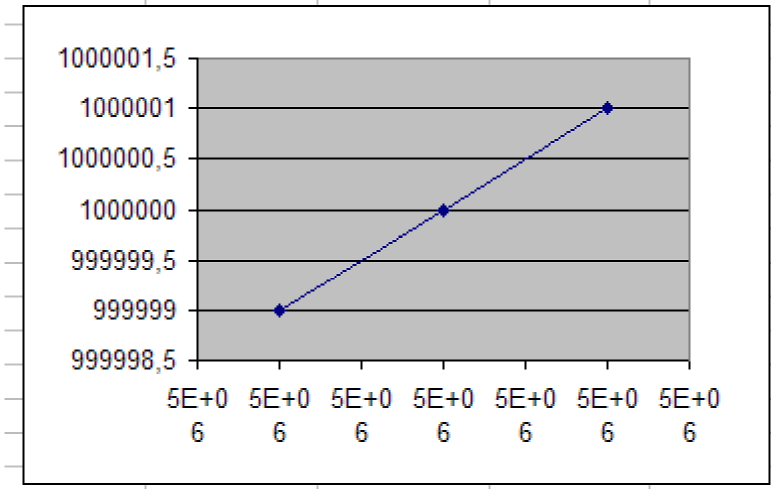


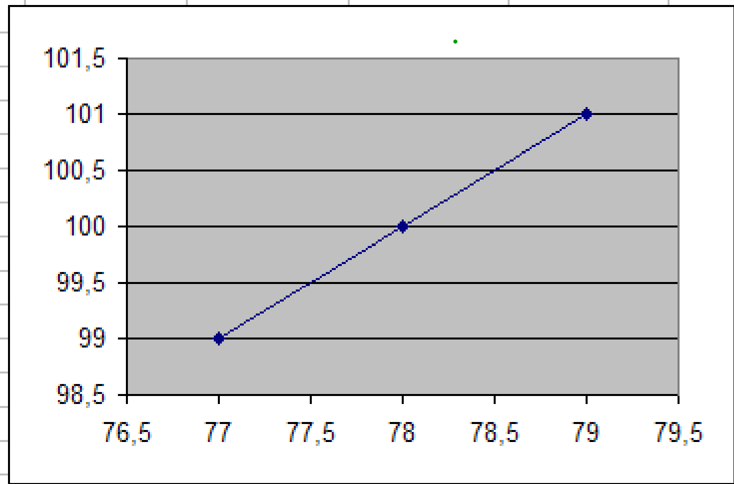
Bei der Berechnung von Konfidenzintervallen kann es von Hand durch Runden leicht zur Differenzkatasprophe kommen. Eine solche Berechnung ist „schlecht konditioniert“.

Weitere Pannen

x	y		x	y
5201477	999999		77	99
5201478	1000000		78	100
5201479	1000001		79	101

Wähle Trendlinie





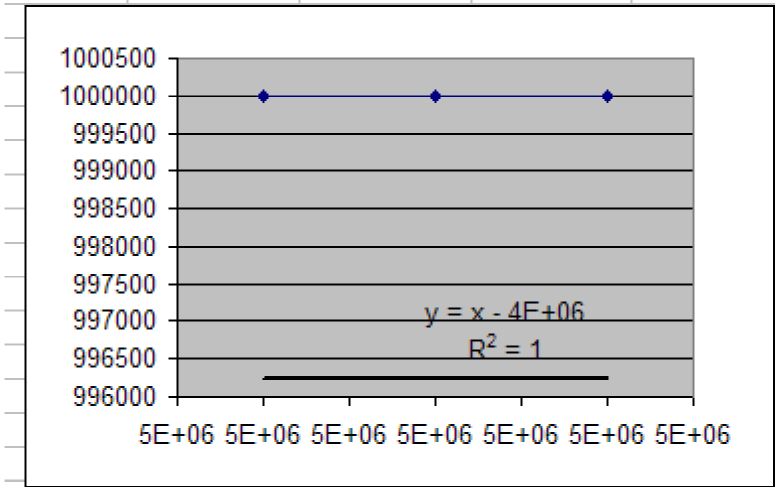
Option Daten verbinden

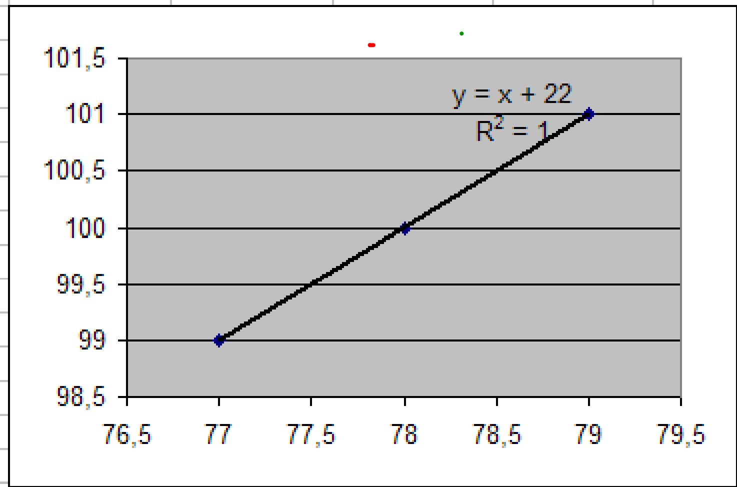
Klar, das ist beide Male eine Gerade

[Excel]

Weitere Pannen

x	y			x	y
5201477	999999			77	99
5201478	1000000			78	100
5201479	1000001			79	101
	Wähle Trendlinie				





Wähle „Trendlinie“ oder „lineare Regression“

Dieselben Daten, aber

nicht gelungen, Panne

Excel

Numerische Verfahren

Was man exakt nicht schafft, das macht man mit Numerik,

Hauptsache, man hat wenigstens Zahlen 'raus.

- Rekursive, b.z.w. iterative Konzepte
  - Heronverfahren für Wurzeln
  - Nullstellenverfahren (Mitten~, Sekanten~ , Newton~)
  - Modellierung von Prozessen (logistisch...)
  - Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Weitere Konzepte:

Numerische Integration, Taylorreihen,
Fourierreihen, Klangverarbeitung, ...
Finite-Element-methode, Simulationen,....

Die Klothoide,
nur numerisch zu bewältigen

gegeben:

$$x = \int_0^t \cos \frac{x^2}{2A^2}\, dx, \; y = \int_0^t \sin \frac{y^2}{2A^2}\, dy \qquad (7.30)$$

Die Integrale lassen sich durch die Simpson'sche Näherungsformel berechnen.

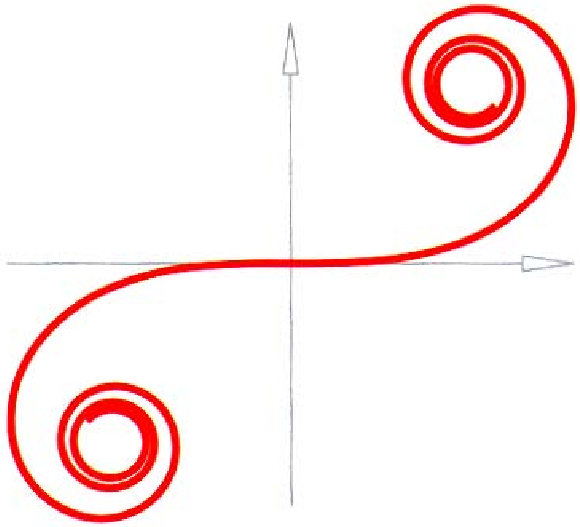


Abb. 7.46 Klothoide

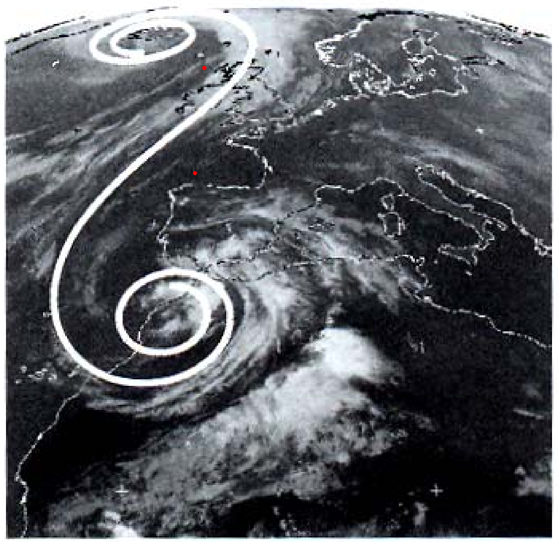


Abb. 7.47 Turbulenzen über dem Atlantik

Glaeser: Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik