Numerik

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Numerics

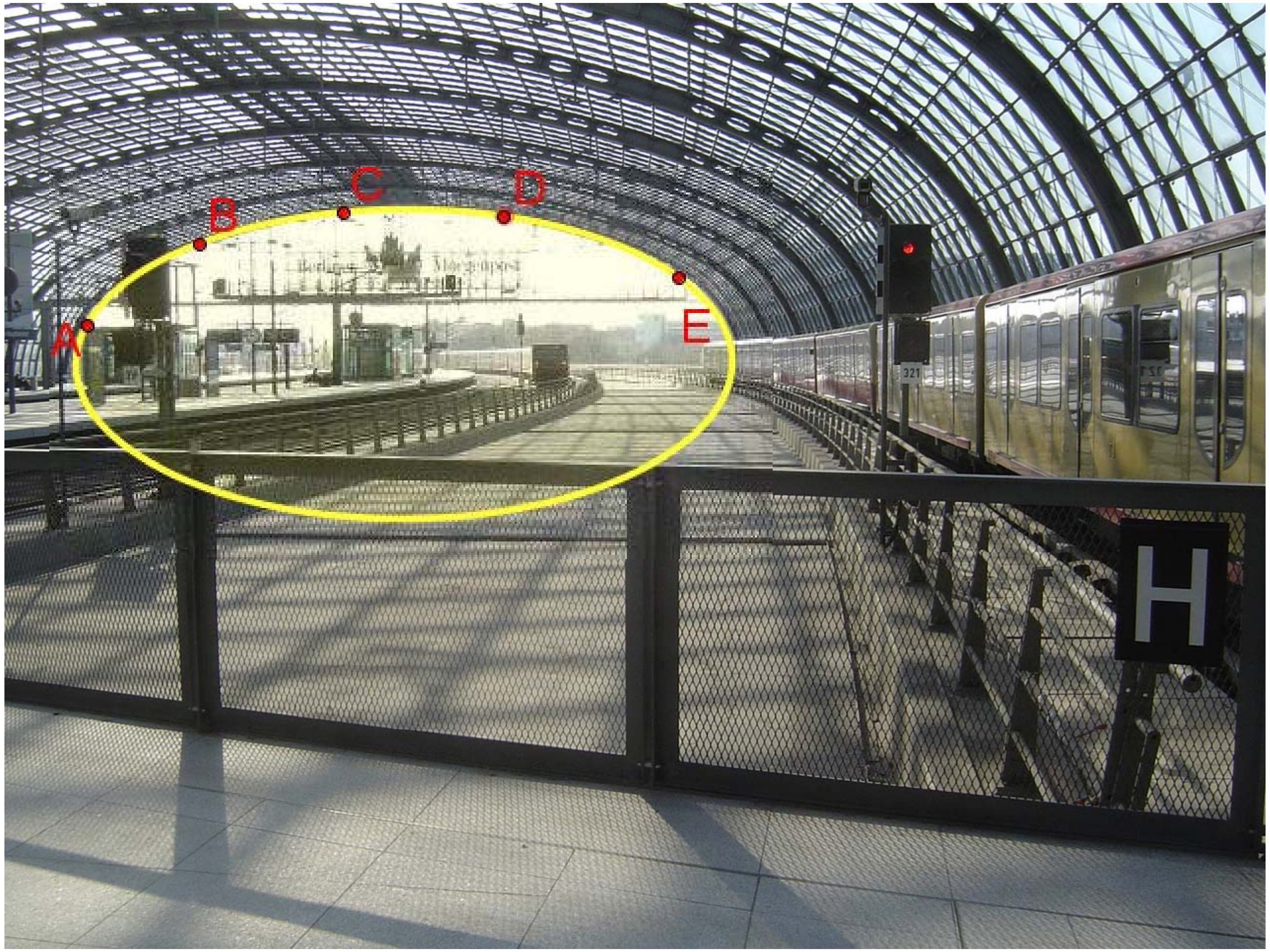
Numerik

- Numerik bewältigt vieles in den Anwendungen
- Fallen und Fußangeln in der Numerik
- Was man exakt nicht schafft, das macht man mit Numerik
- Hauptsache, man hat wenigstens Zahlen 'raus

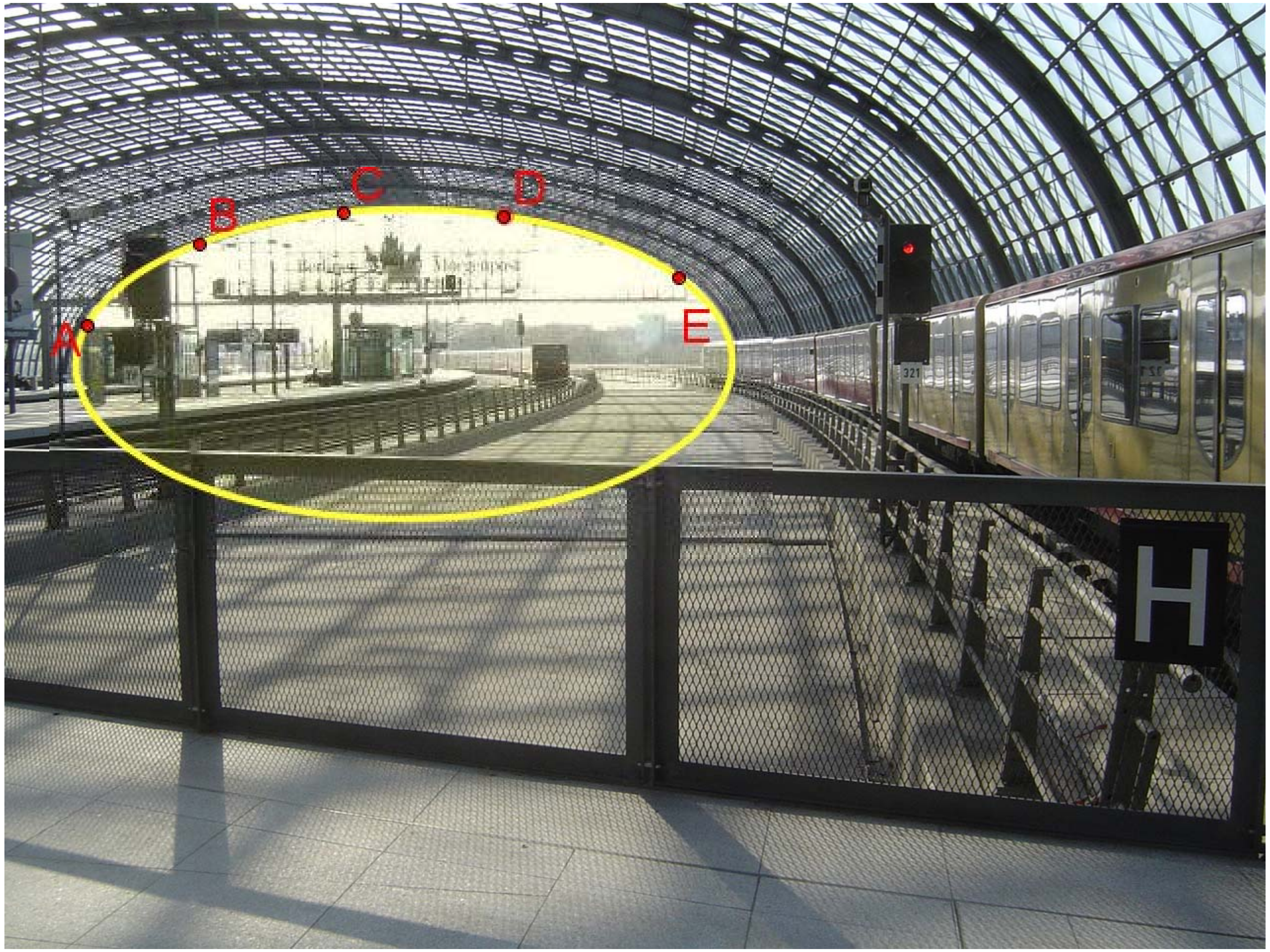
Numerics

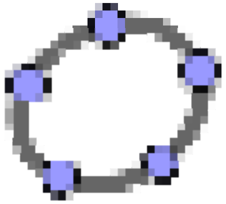
- In a lot of applications can be managed with numerics.
- Pitfalls and mantraps in the numerics.
- What you cannot do exactly you can do it with numerics.
- The main thing: you have at least numbers as a result.

Numerik

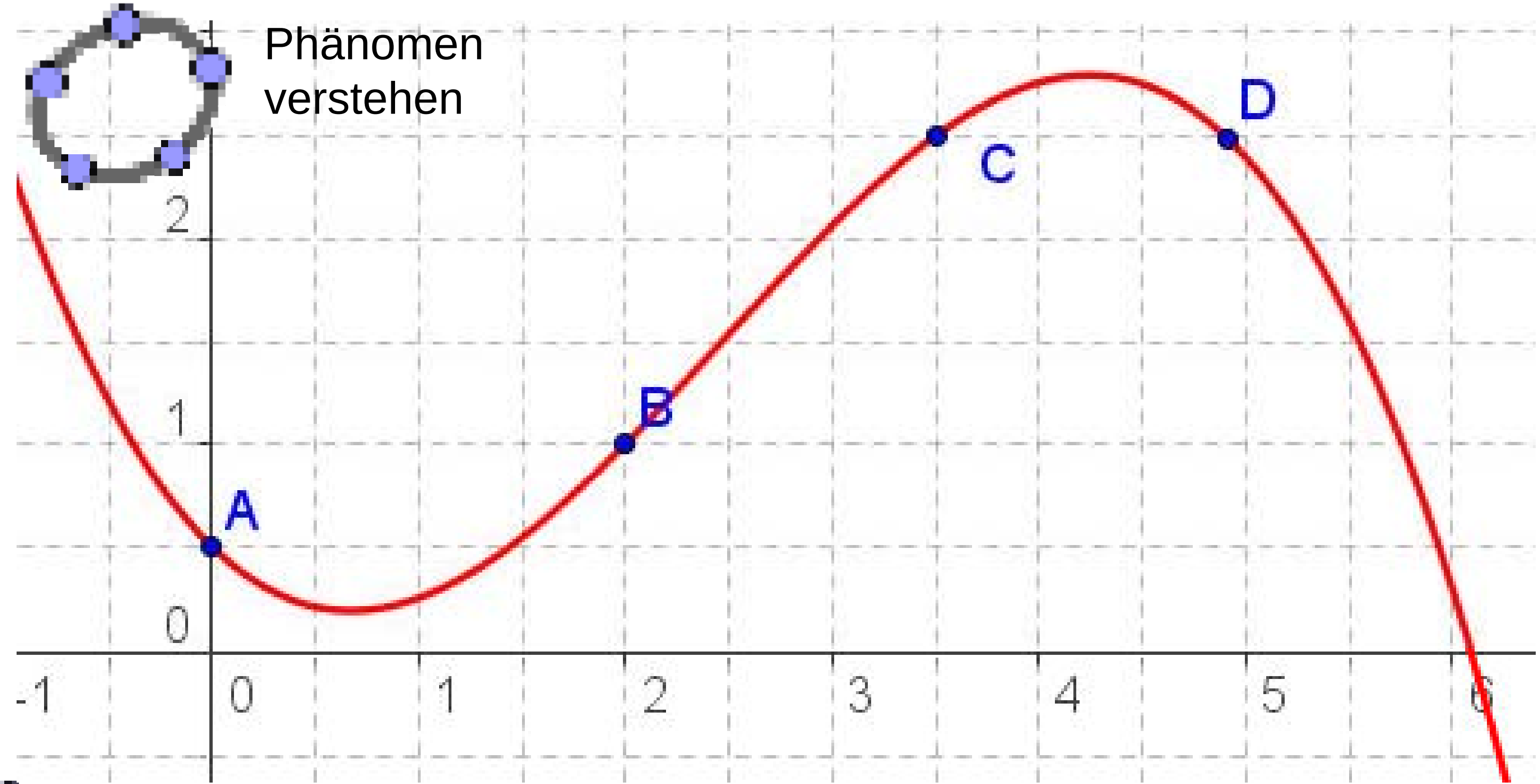


Numerics

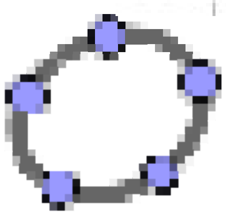




Lagrange-Interpolation



Phänomen
verstehen

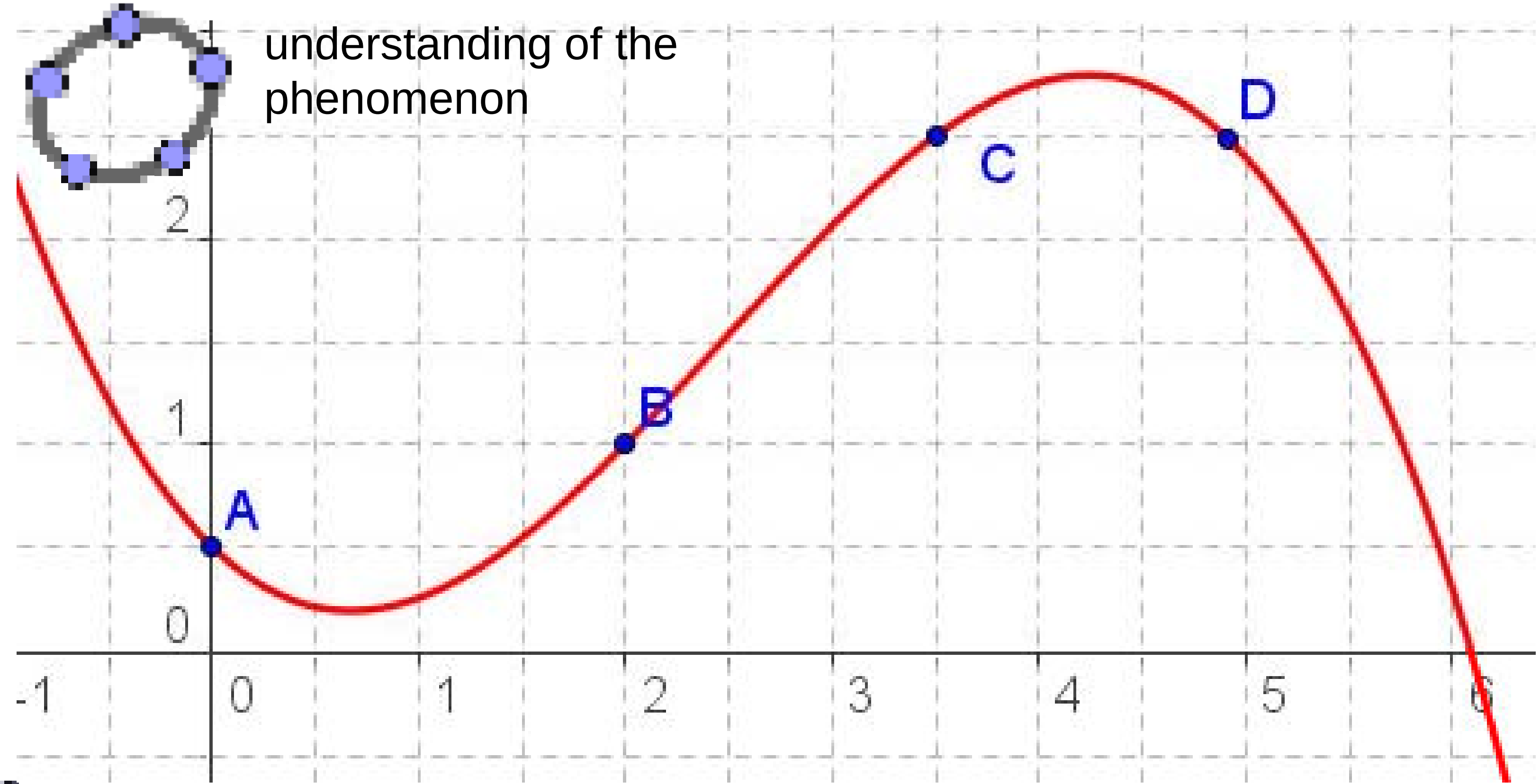


Erklärung
verstehen

p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

Lagrange Interpolation

understanding of the
phenomenon



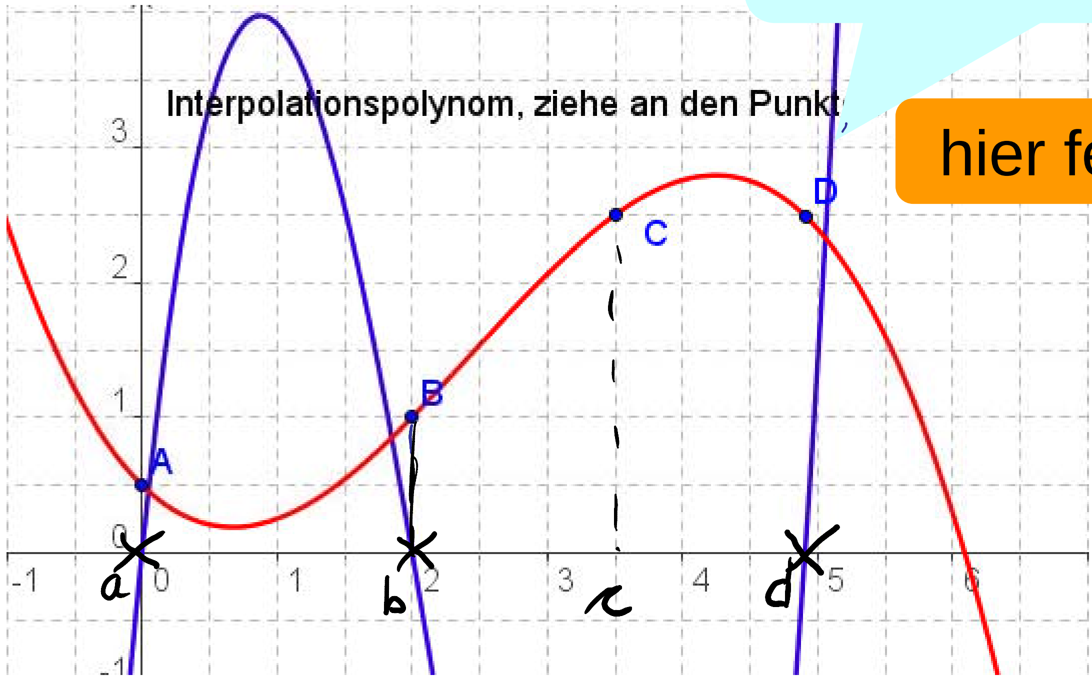
understanding of the
explanation

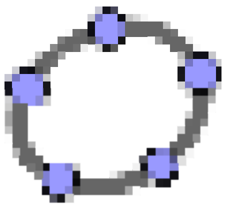
p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

Lagrange-Interpolation

$$(x-a)(x-b)(x-d)$$

hier fehlt (x-c) !



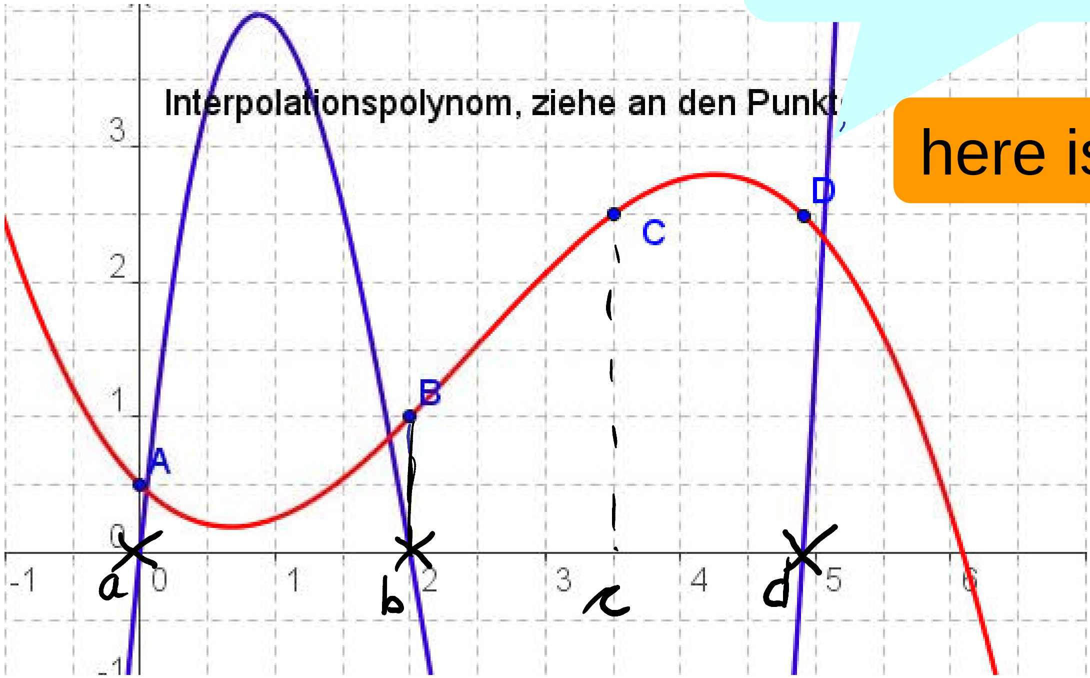


p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

Lagrange Interpolation

$$(x-a)(x-b)(x-d)$$

here is no (x-c) !

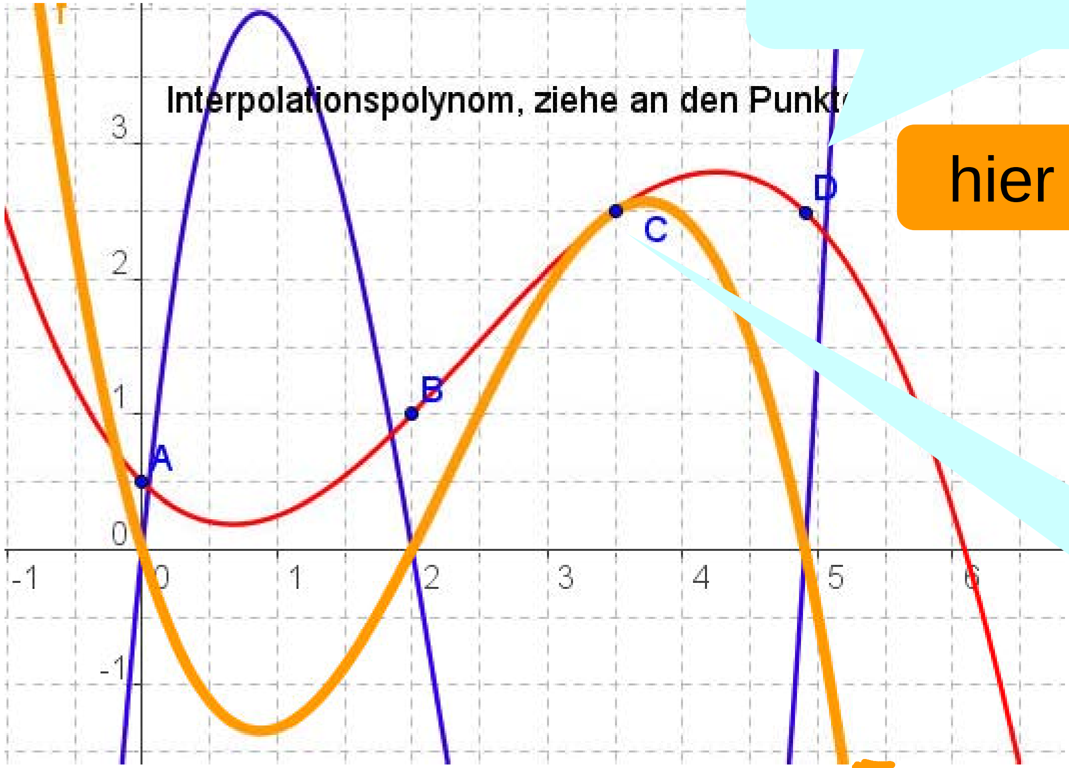


p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

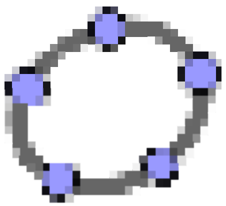
Lagrange-Interpolation

$$(x-a)(x-b)(x-d)$$

hier fehlt (x-c) !

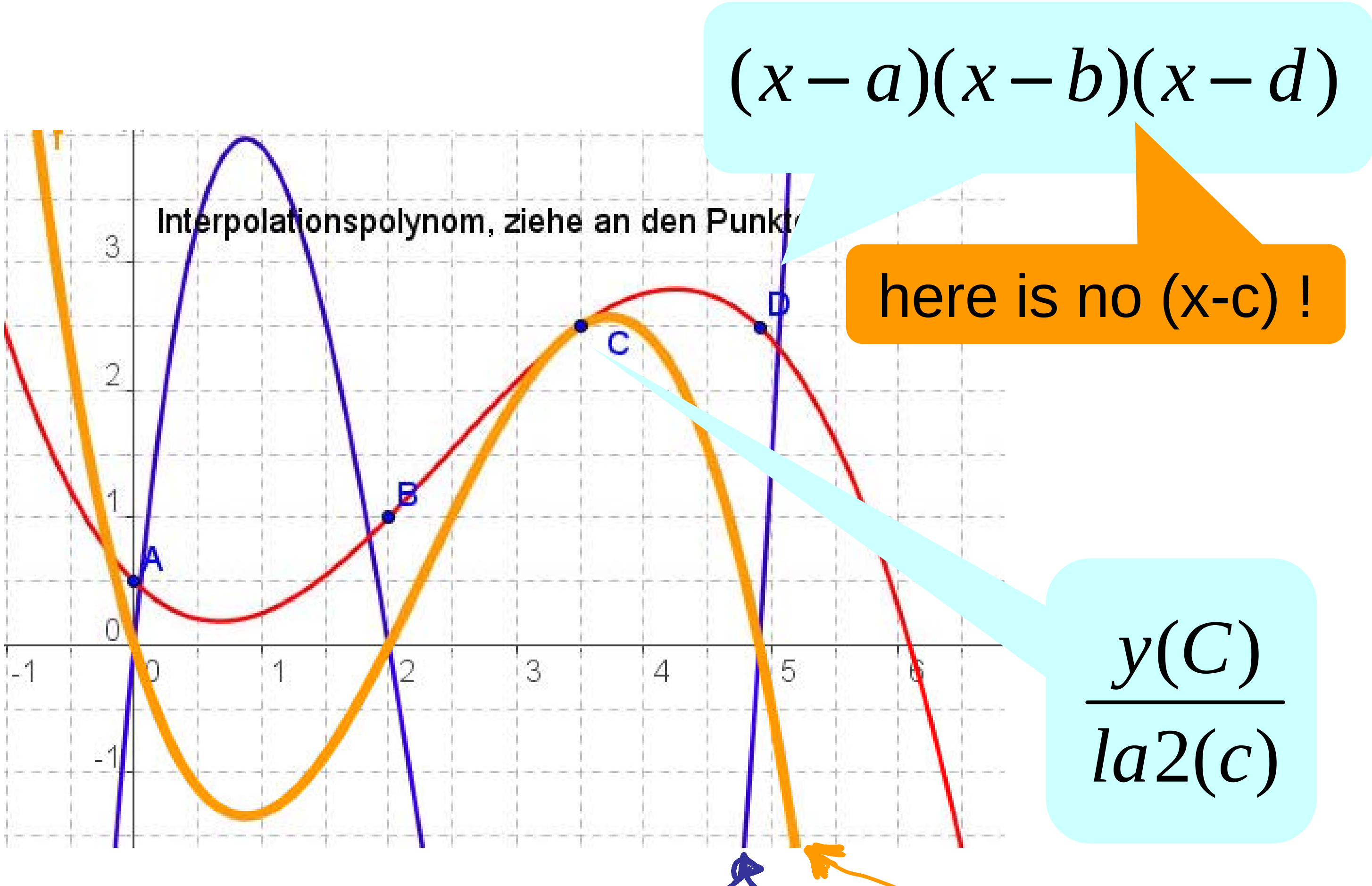


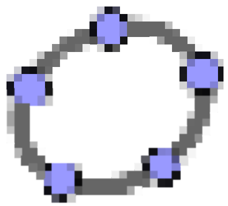
$$\frac{y(C)}{la2(c)}$$



p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

Lagrange Interpolation





p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

Lagrange-Interpolation

Jeder Punkt

erzeugt einen

Baustein.

hier fehlt (x-c) !

$$\frac{y(C)}{la2(c)}$$

$$(x-a)(x-b)(x-d)$$

p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

la(x) = y(A) / ((x(A) - x(B)) (x(A) - x(C)) (x(A) - x(D))) (x - x(B)) (x - x(C)) (x - x(D)) + y(B) / ((x(B) - x(A)) (x(B) - x(C)) (x(B) - x(D))) (x - x(A)) (x - x(C)) (x - x(D)) + y(C) / ((x(C) - x(A)) (x(C) - x(B)) (x(C) - x(D))) (x - x(A)) (x - x(B)) (x - x(D)) + y(D) / ((x(D) - x(A)) (x(D) - x(B)) (x(D) - x(C))) (x - x(A)) (x - x(B)) (x - x(C))

Lagrange-Algorithmus in einem Schritt aufgeschrieben.

Lagrange Interpolation

heere is no (x-c) !

$$\frac{y(C)}{la2(c)}$$

$$(x-a)(x-b)(x-d)$$

Every Point generates one summand.

p(x) = c0 la0(x) + c1 la1(x) + c2 la2(x) + c3 la3(x)

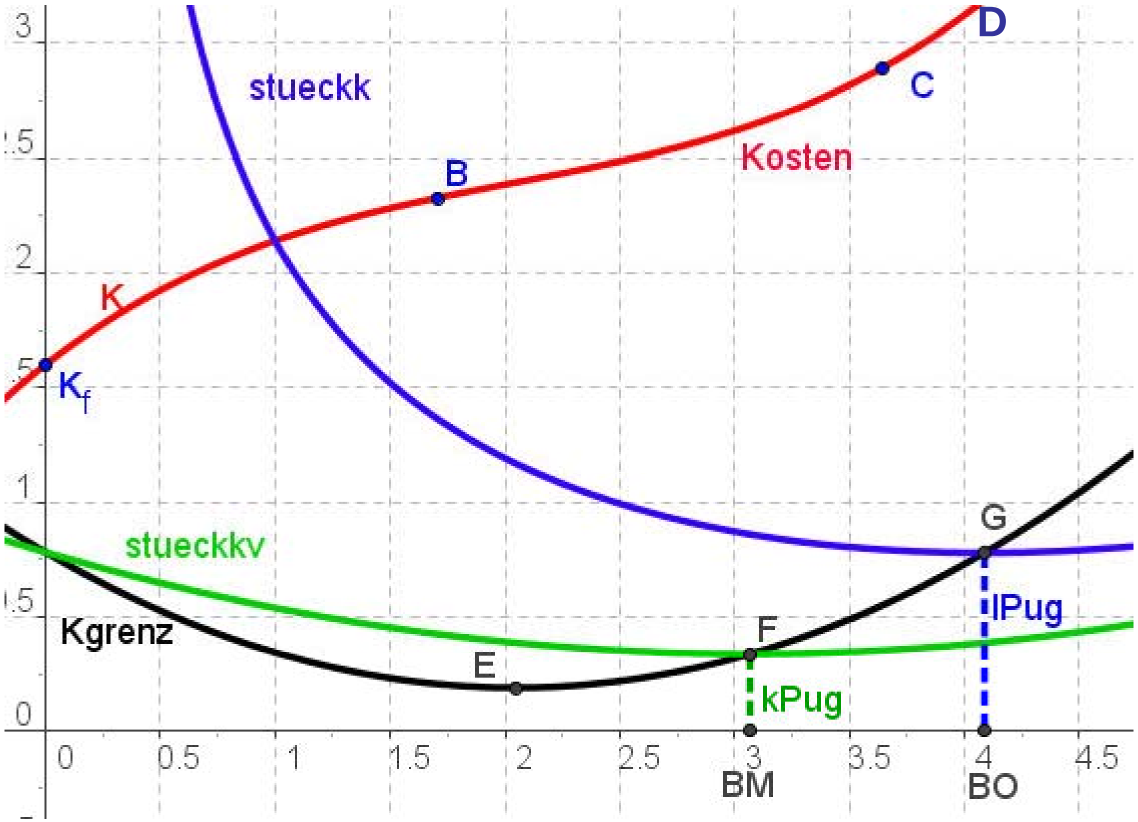
la(x) = y(A) / ((x(A) - x(B)) (x(A) - x(C)) (x(A) - x(D))) (x - x(B)) (x - x(C)) (x - x(D)) + y(B) / ((x(B) - x(A)) (x(B) - x(C)) (x(B) - x(D))) (x - x(A)) (x - x(C)) (x - x(D)) + y(C) / ((x(C) - x(A)) (x(C) - x(B)) (x(C) - x(D))) (x - x(A)) (x - x(B)) (x - x(D)) + y(D) / ((x(D) - x(A)) (x(D) - x(B)) (x(D) - x(C))) (x - x(A)) (x - x(B)) (x - x(C))

Lagrange‘s algorithmusdemonstrated in one term.

Wirtschaftsfunktionen

mit Lagrange-Interpolation

Modelliere
die
Kostenfunktion
passend.



Kosten

Stückkosten

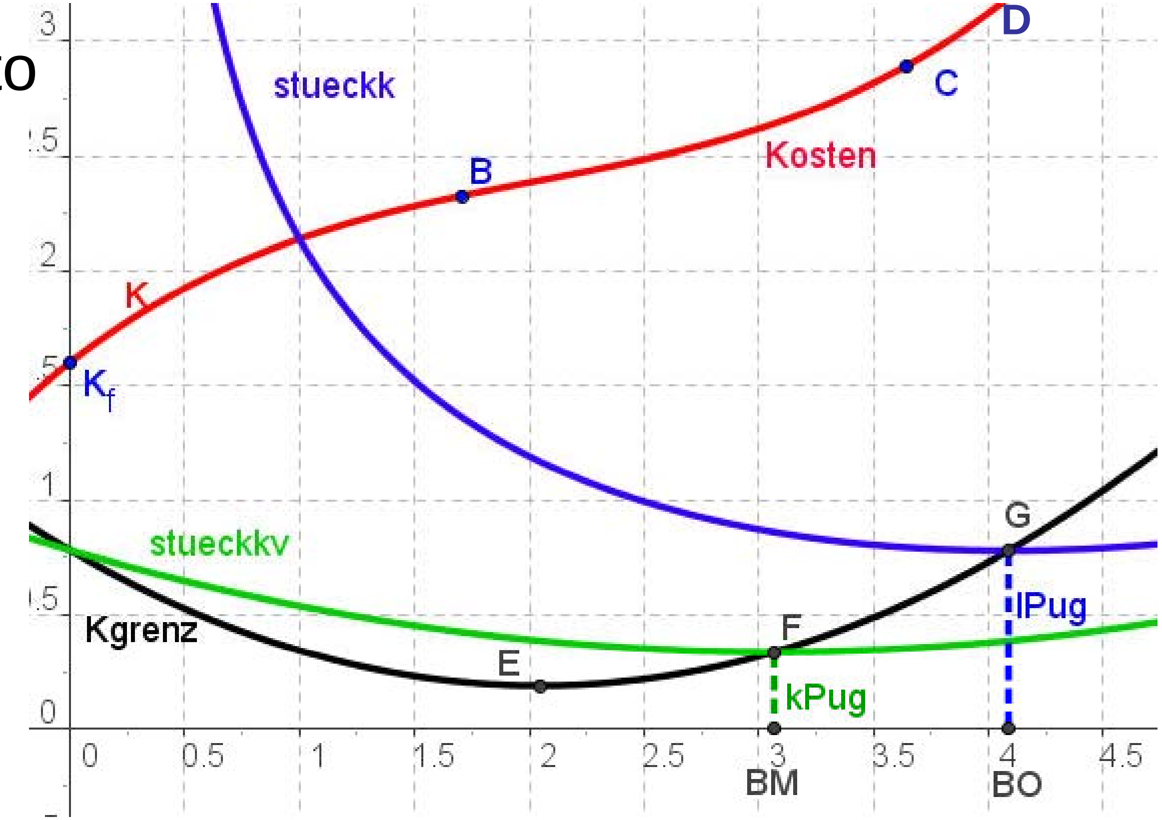
variable Stückkosten

Grenzkosten

BM = Betriebsminimum
BO = Betriebsoptimum
kPug= kurzfristige Preisuntergrenze
lPug= langfristige Preisuntergrenze

Economical Functions
with Lagrange Interpolation

First you have to model the cost function.

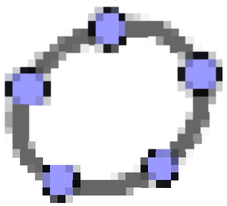


costs

unit costs

variable unit costs

marginal costs



BM = minimum output
BO = optimum output
kPug= short time lower price limit
lPug= long time lower price limit

Wirtschaftsfunktionen

mit Lagrange-Interpolation

Wirtschaftsfunktionen. Die freie Parabel aus dem 1. Problem sei nun grenk(x), die Grenzkosten−Fkt. (Ableitung der Kostenfunktion)

Dann ist $\mathbf{kv}(x):=\int \mathbf{grenzk}(x)\, dx$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{kv}(x)$ ▸ $\frac{4\cdot x^3}{9}-\frac{19\cdot x^2}{6}+9\cdot x$

die Funktion der "variablen Kosten"

Für die Zeichnung sind die Fixkosten auf 5 gesetzt. $\mathbf{kf}:=5$ ▸ 5

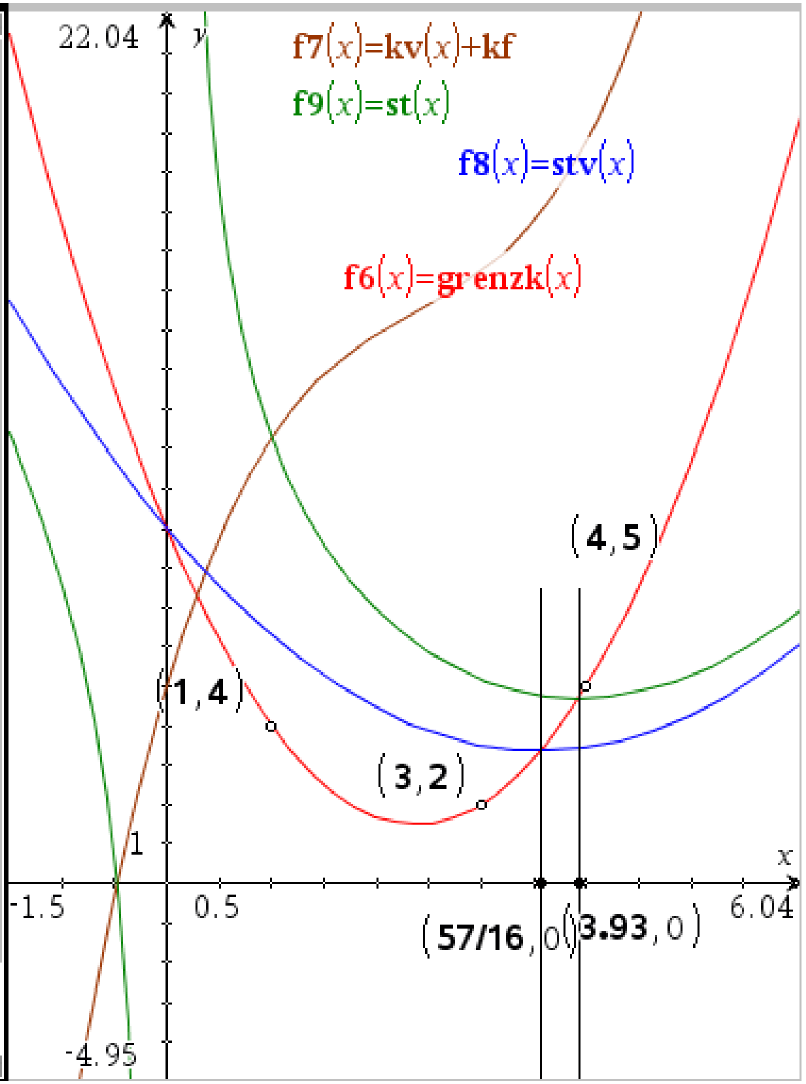
Stückkosten $\mathbf{st}(x):=\frac{\mathbf{kv}(x)+\mathbf{kf}}{x}$ ▸ *Fertig*

variable Stückkosten $\mathbf{stv}(x):=\frac{\mathbf{kv}(x)}{x}$ ▸ *Fertig*

Berechnungen nächste Seite

kpug ▸ $\frac{215}{64}$ **lpug** ▸ 4.69166

Ziehe die Hohlkreispunkte (Definitionen unten)



Econamical Functions with Lagrange Interpolation

Wirtschaftsfunktionen. Die freie Parabel aus dem 1. Problem sei nun grenk(x), die Grenzkosten−Fkt. (Ableitung der Kostenfunktion)

Dann ist $\mathbf{kv}(x):=\int \mathbf{grenzk}(x)\,dx$ ▸ *Fertig*

$$\mathbf{kv}(x) ▸ \frac{4\cdot x^3}{9}-\frac{19\cdot x^2}{6}+9\cdot x$$

die Funktion der "variablen Kosten"

Für die Zeichnung sind die Fixkosten auf 5 gesetzt. $\mathbf{kf}:=5$ ▸ 5

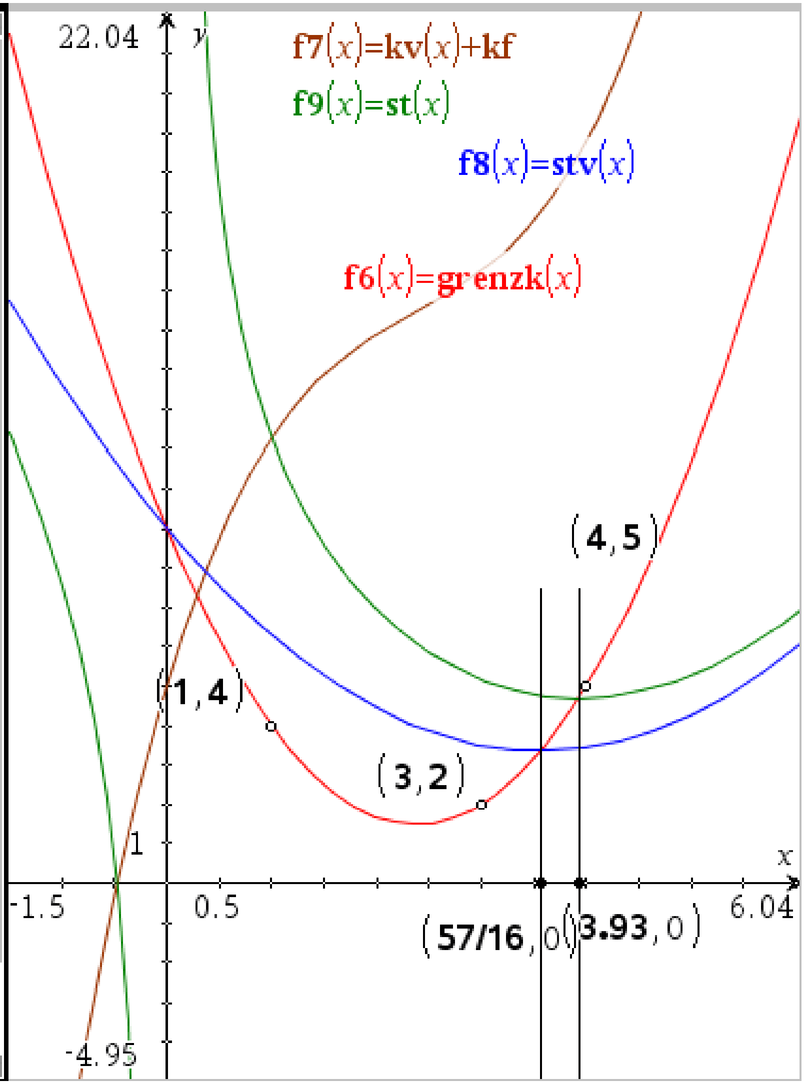
Stückkosten $\mathbf{st}(x):=\frac{\mathbf{kv}(x)+\mathbf{kf}}{x}$ ▸ *Fertig*

variable Stückkosten $\mathbf{stv}(x):=\frac{\mathbf{kv}(x)}{x}$ ▸ *Fertig*

Berechnungen nächste Seite

kpug ▸ $\frac{215}{64}$ **lpug** ▸ 4.69166

Ziehe die Hohlkreispunkte (Definitionen unten)



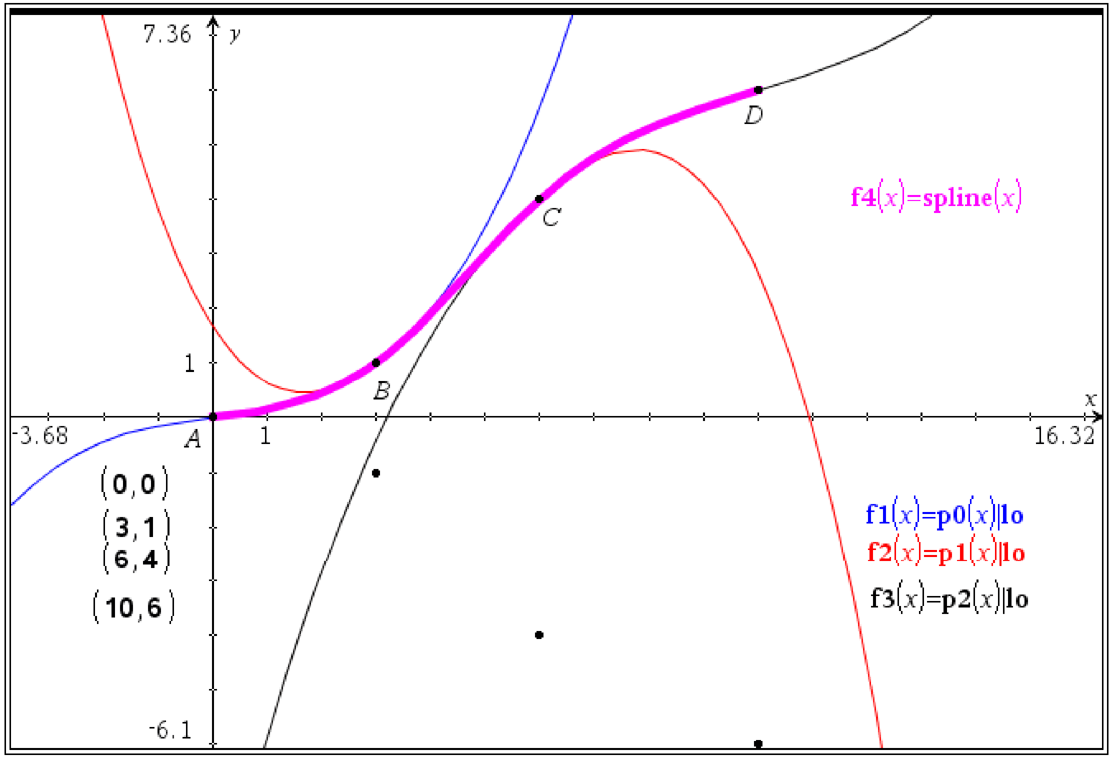
Numerik beim Bauen
Numerics in the Building

Splines = Straklatten
Elastic Rulers, Biegsame Lineale

Splines im Schiffbau

Halber Querschnitt

In gekippter Lage



p0(x)|lo ▸ $\frac{x^3}{54}+\frac{x}{6}$

p1(x)|lo ▸ $\frac{-x^3}{54}+\frac{x^2}{3}-\frac{5\cdot x}{6}+1$

p2(x)|lo ▸ $\frac{-x^3}{24}+\frac{3\cdot x^2}{4}-\frac{10\cdot x}{3}+6$

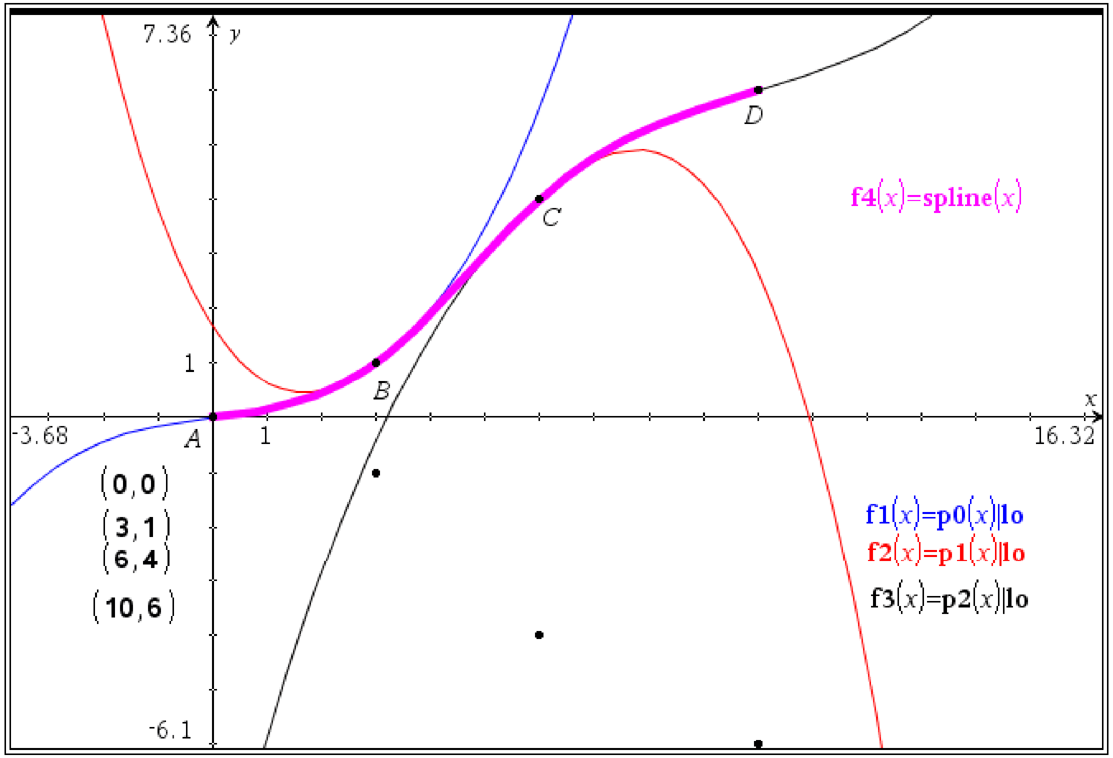
lo:=solve({**gl0**,**gl1**,**gl2**,**gl3**,**gl4**,**gl5**,**gl6**},{*b0*,*d0*,*b1*,*c1*,*d1*,*b2*,*d2*})

▸ $b0=\frac{1}{6}$ and $b1=\frac{2}{3}$ and $b2=\frac{7}{6}$ and $c1=\frac{1}{6}$ and $d0=\frac{1}{54}$ and $d1=\frac{-1}{54}$ and $d2=\frac{-1}{24}$

Splines in the shipbuilding

half cross section

turn it 90°left



$$p0(x)|lo \;\blacktriangleright\; \frac{x^3}{54}+\frac{x}{6}$$

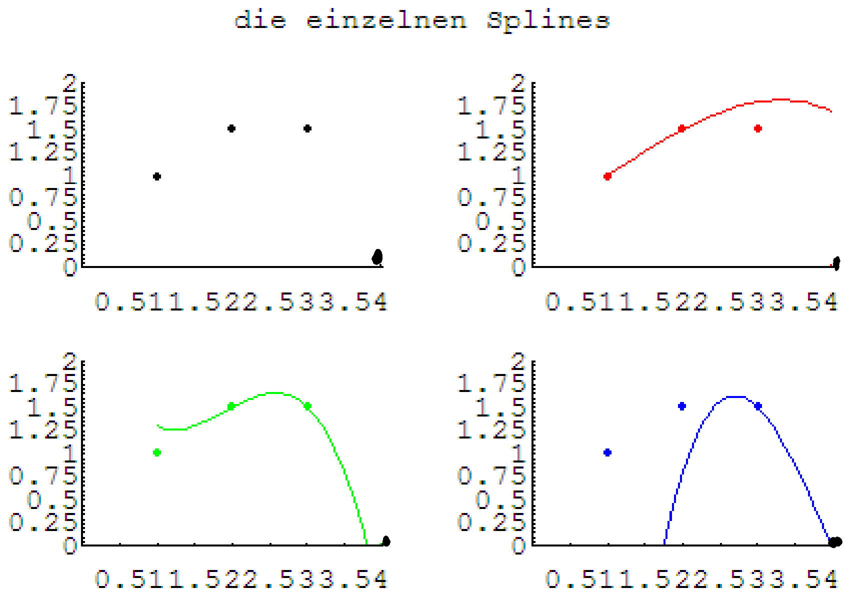
$$p1(x)|lo \;\blacktriangleright\; \frac{-x^3}{54}+\frac{x^2}{3}-\frac{5\cdot x}{6}+1$$

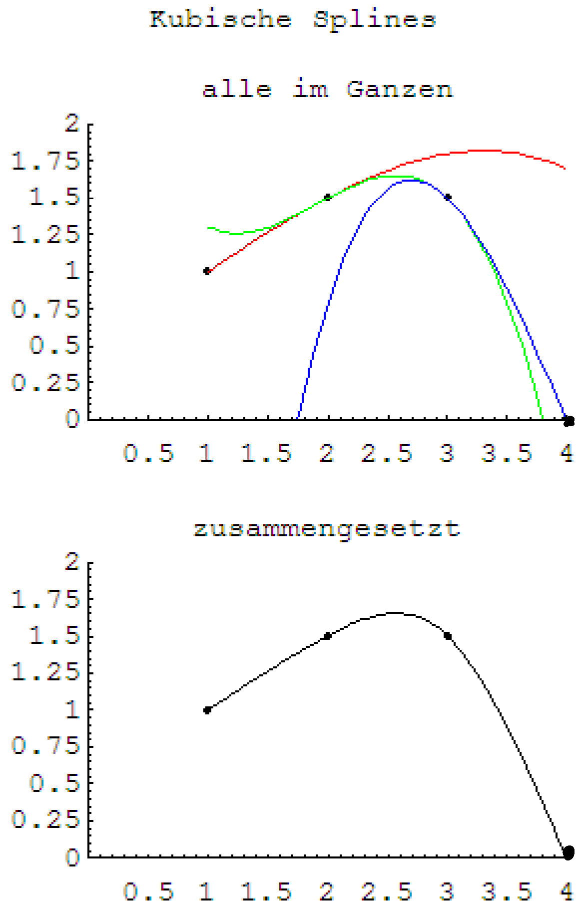
$$p2(x)|lo \;\blacktriangleright\; \frac{-x^3}{24}+\frac{3\cdot x^2}{4}-\frac{10\cdot x}{3}+6$$

lo:=solve({**gl0**,**gl1**,**gl2**,**gl3**,**gl4**,**gl5**,**gl6**},{*b0*,*d0*,*b1*,*c1*,*d1*,*b2*,*d2*})

$$\blacktriangleright\; b0=\frac{1}{6} \text{ and } b1=\frac{2}{3} \text{ and } b2=\frac{7}{6} \text{ and } c1=\frac{1}{6} \text{ and } d0=\frac{1}{54} \text{ and } d1=\frac{-1}{54} \text{ and } d2=\frac{-1}{24}$$

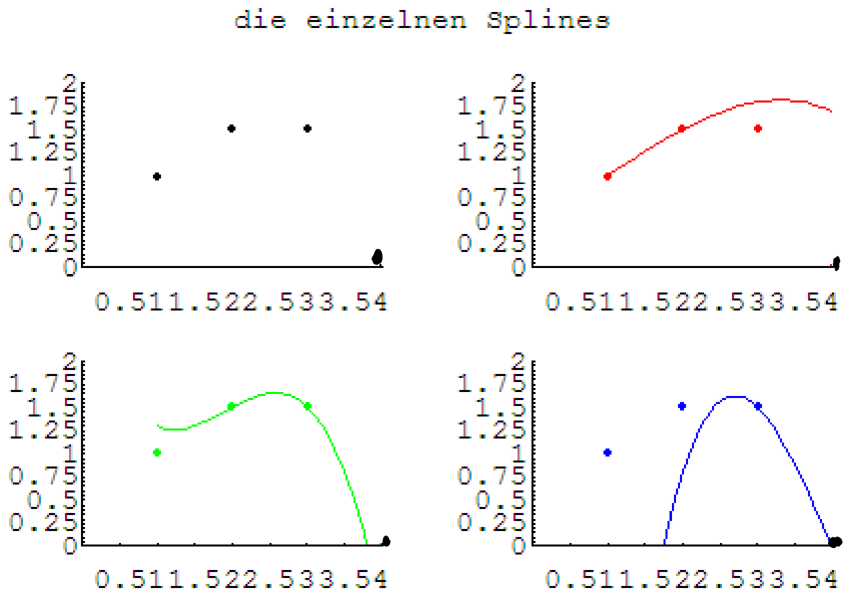
Kubische Splines

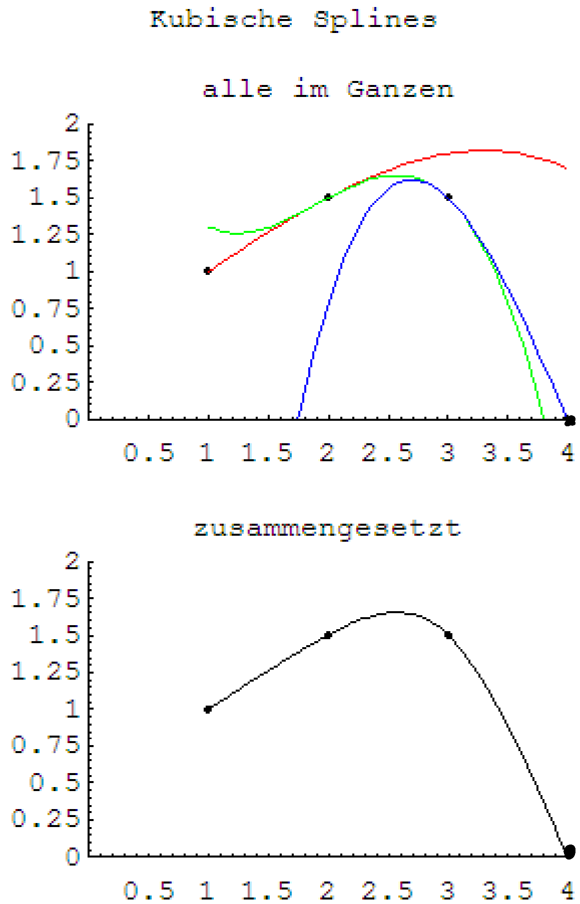




- Vier „Nägel“ markieren die Form.
- Von einem zum nächsten legt man ein Polynom 3. Grades (daher „kubisch“).
- Man sorgt für gute Übergänge
- und fügt alle passend zusammen.

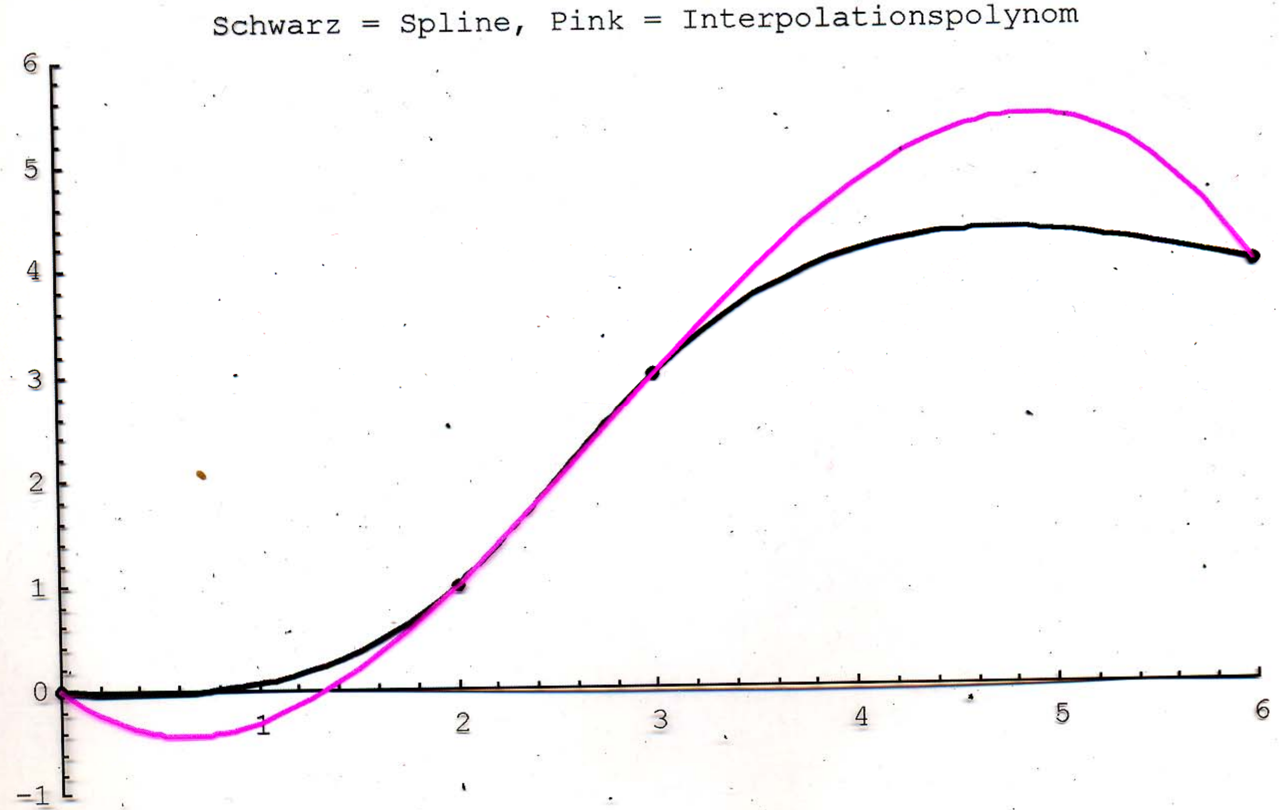
Cubic Splines





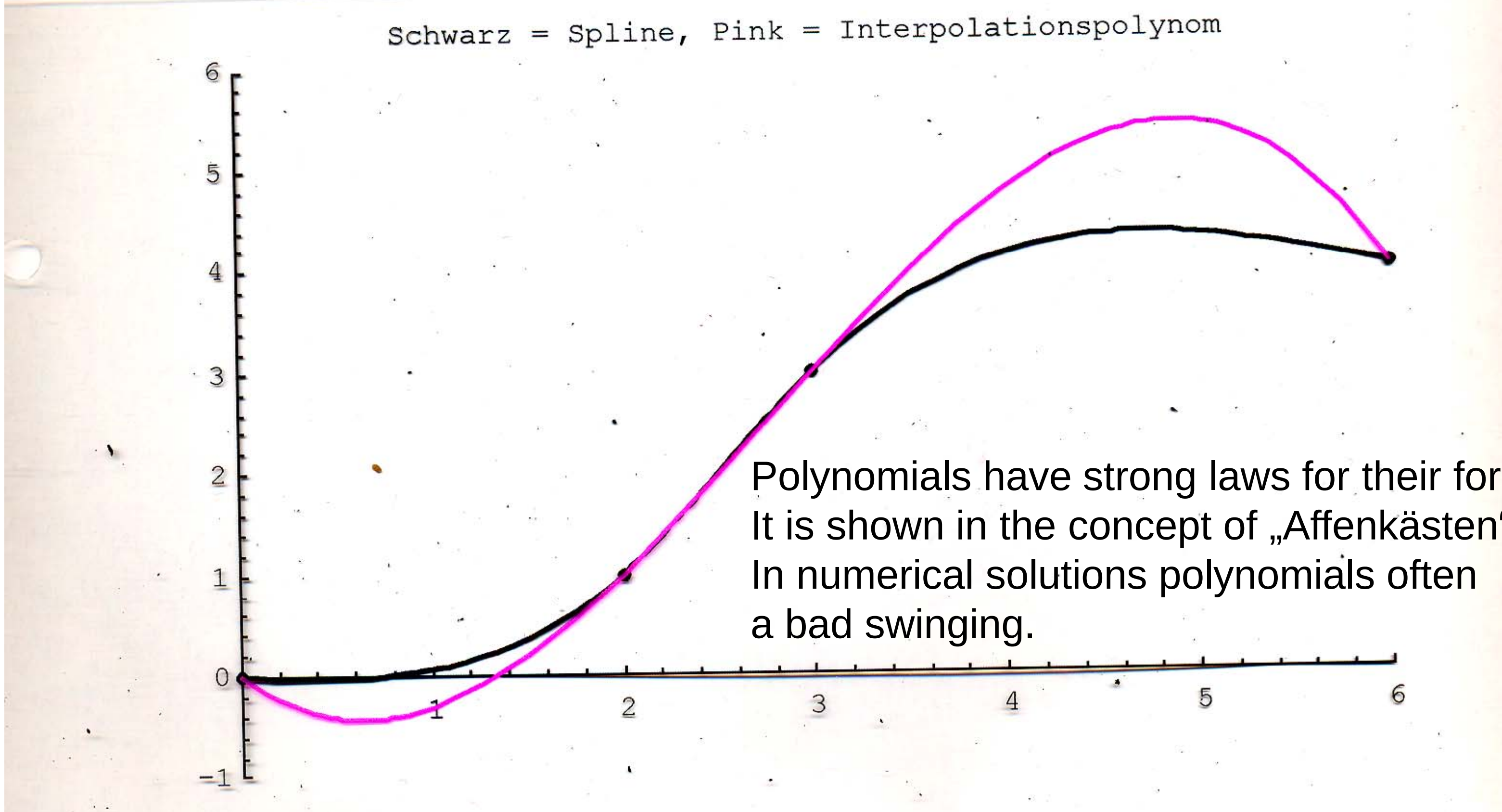
- Four „pins“ mark the form.
- From one pin to the next we construct a polynomial of degree 3. Therefore we say „cubic“.
- We take care for good transitions.
- We put all together.

Splines als Formkonzept



Facit: Weil Polynome sehr starke "Formgesetze" haben, (siehe Affenkästen), erzeugen in der Numerik unerwünschtes "Ausschwingen".

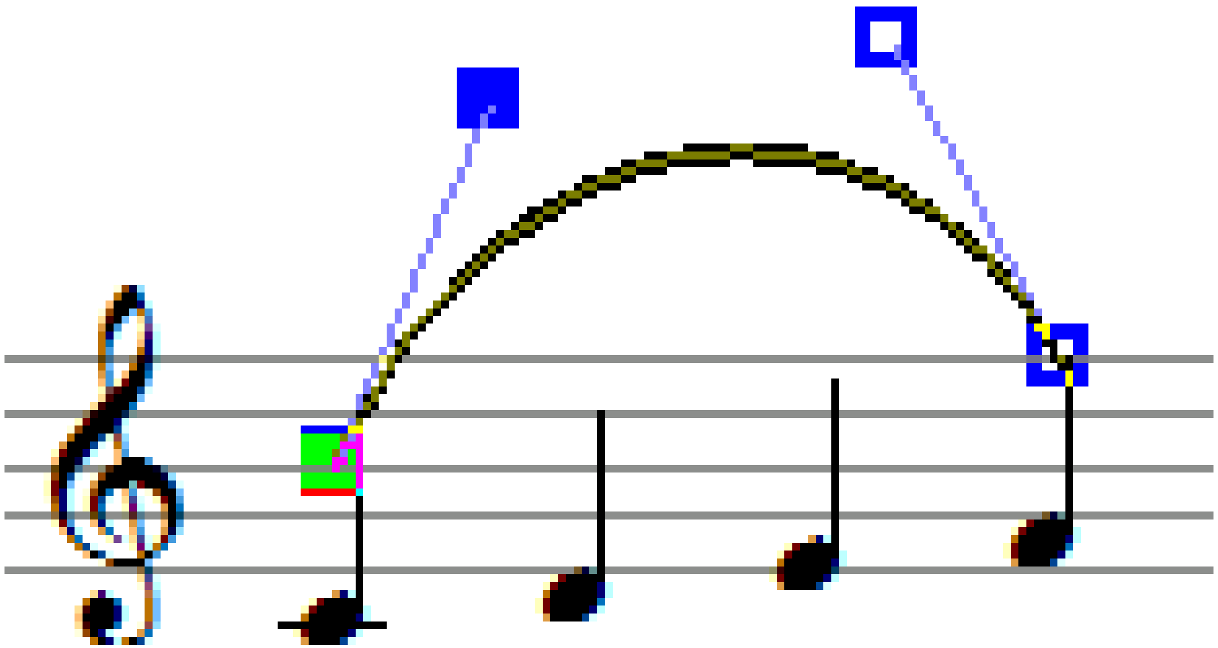
Splines as a Concept for Forms

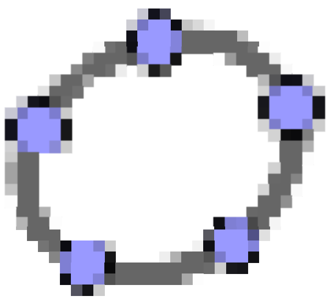


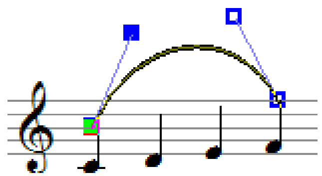
Polynomials have strong laws for their form.
It is shown in the concept of „Affenkästen".
In numerical solutions polynomials often have a bad swinging.

Facit: Weil Polynome sehr starke "Formgesetze" haben, (siehe Affenkästen), erzeugen in der Numerik unerwünschtes "Ausschwingen".

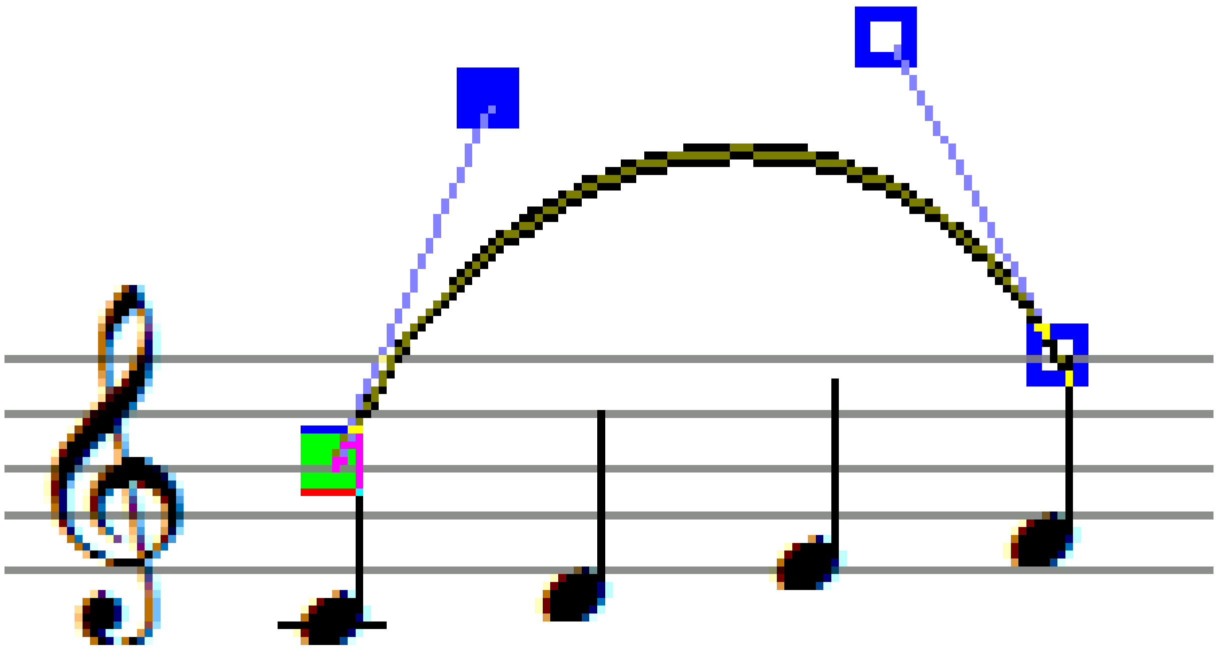
Bézier-Splines

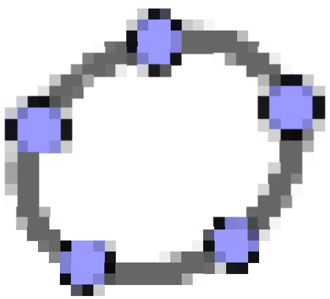


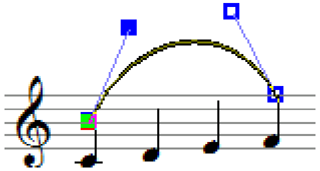




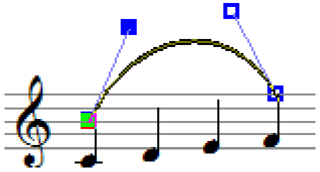
Bézier Splines

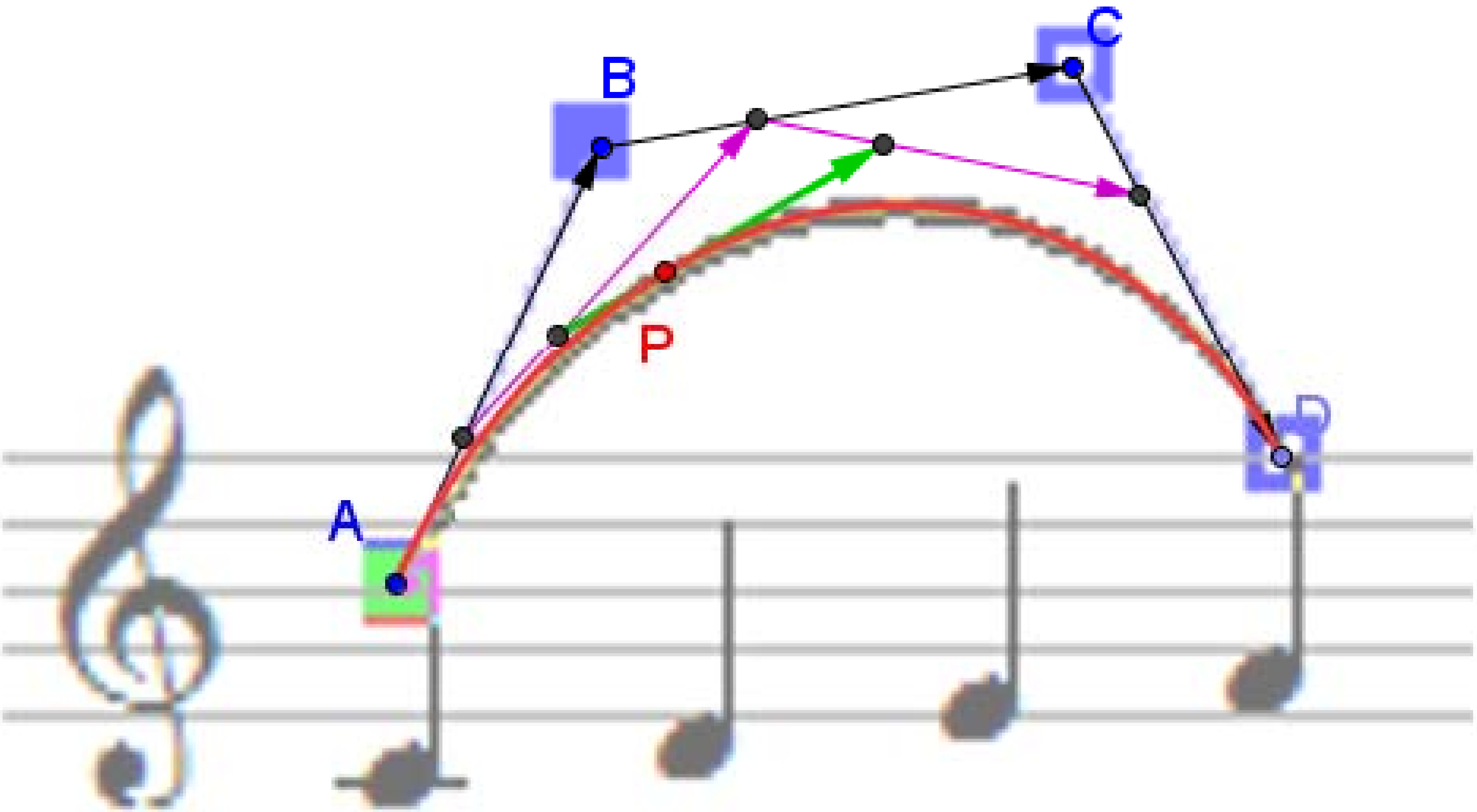




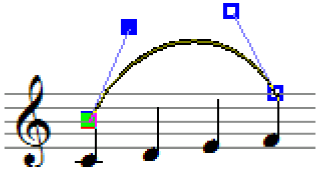


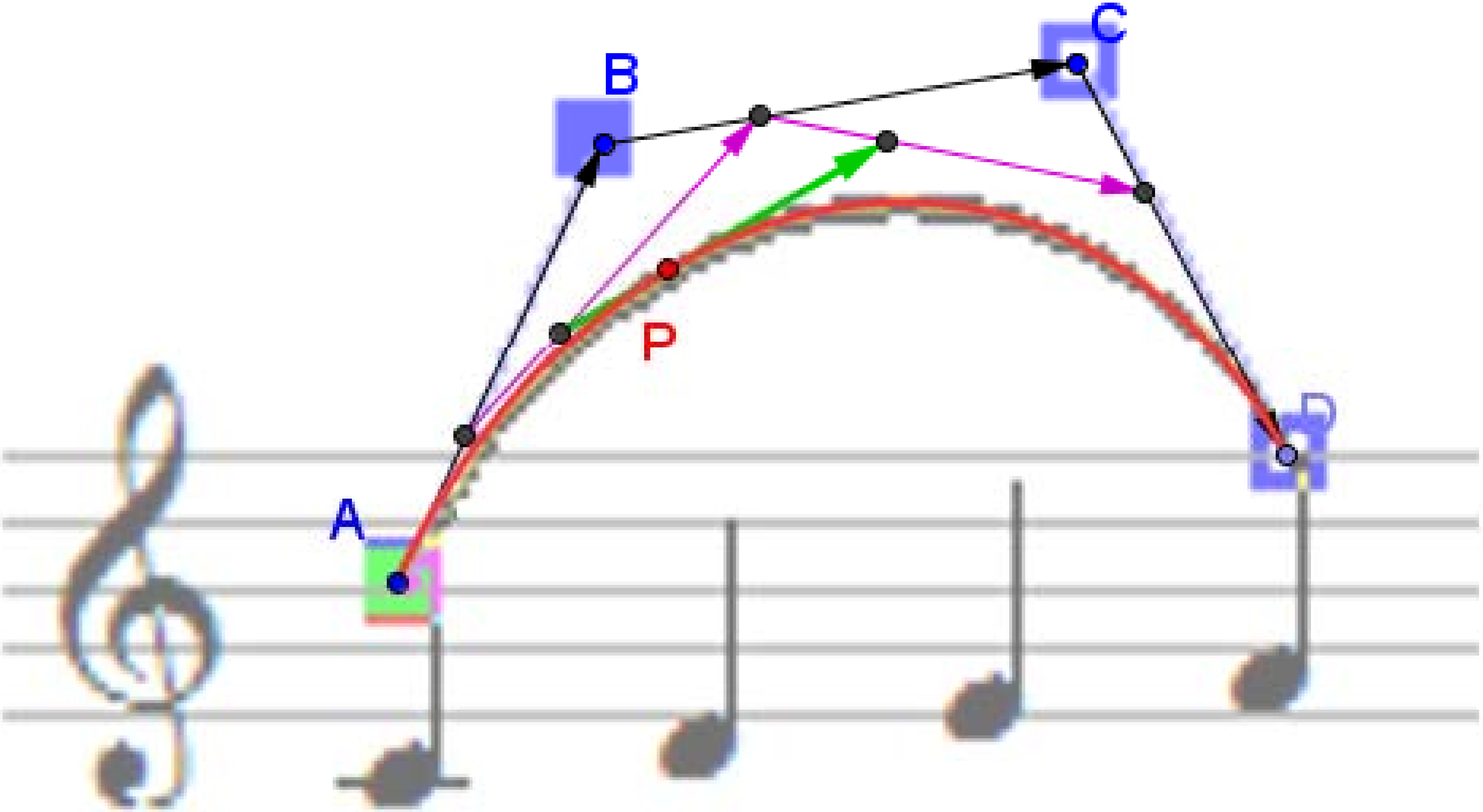
Bézier-Splines





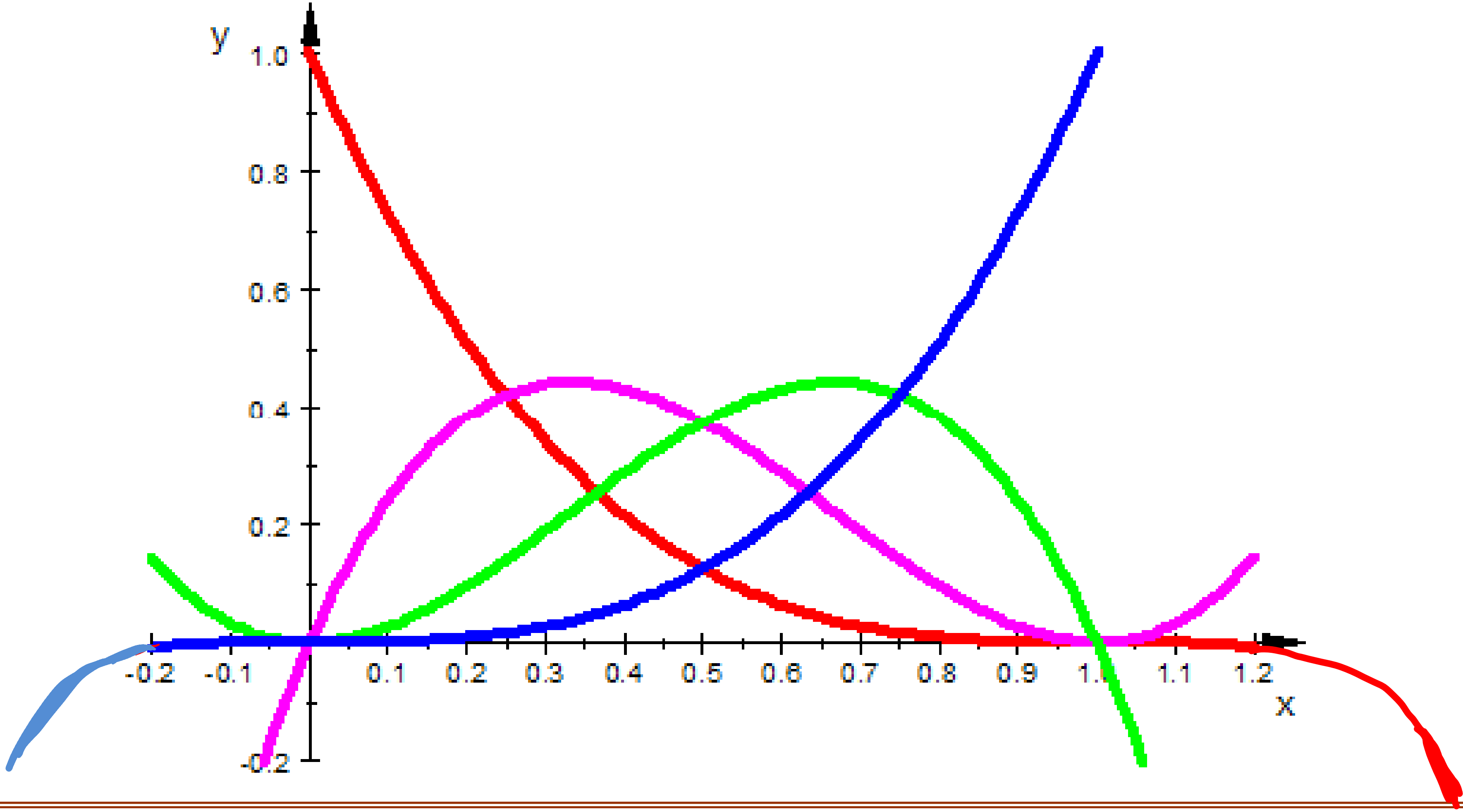
Bézier Splines





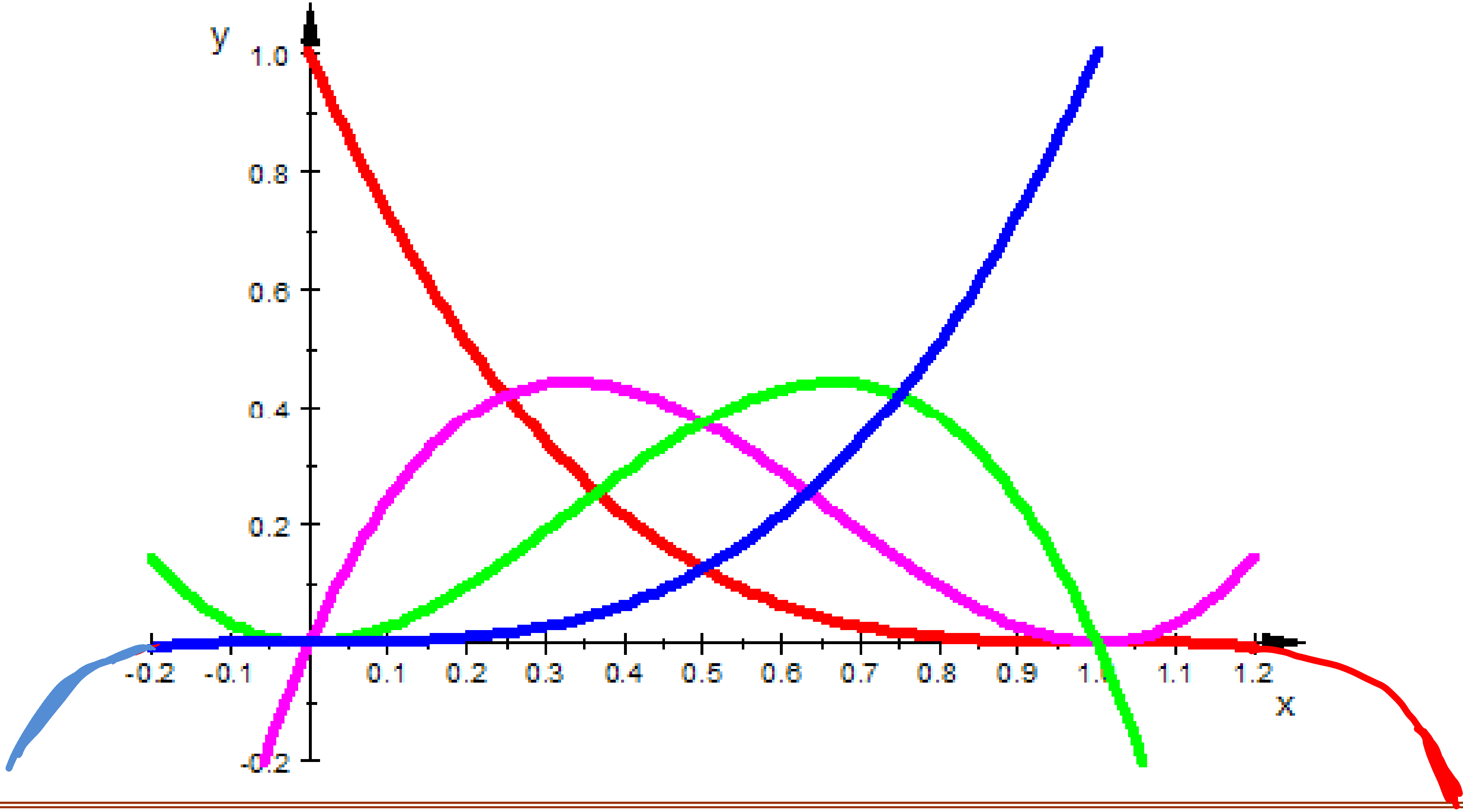
Bézier-Splines

Sie sind aus Bernstein-Polynomen aufgebaut.



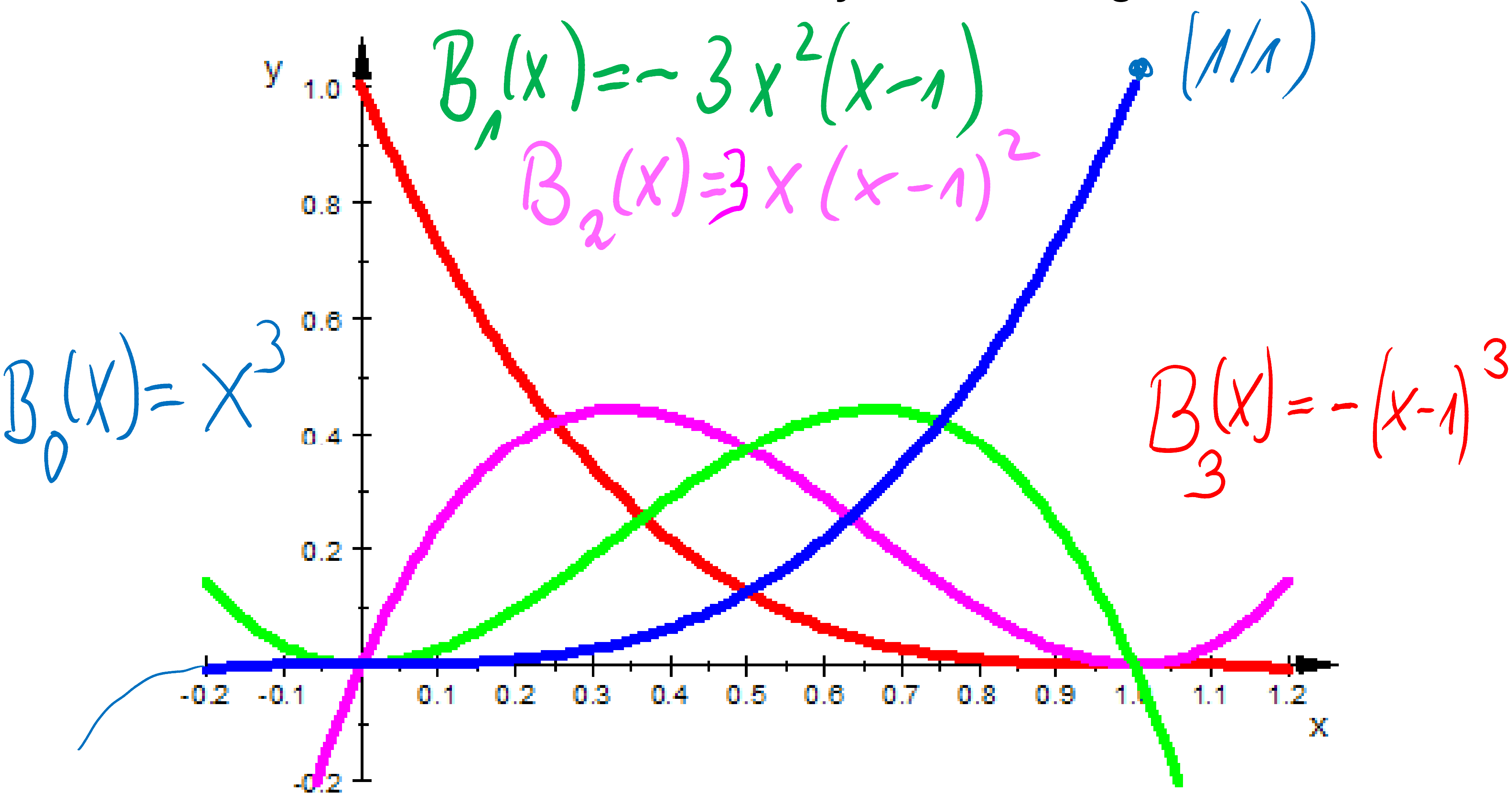
Bézier Splines

They are build out of Bernstein‘s polynomials.



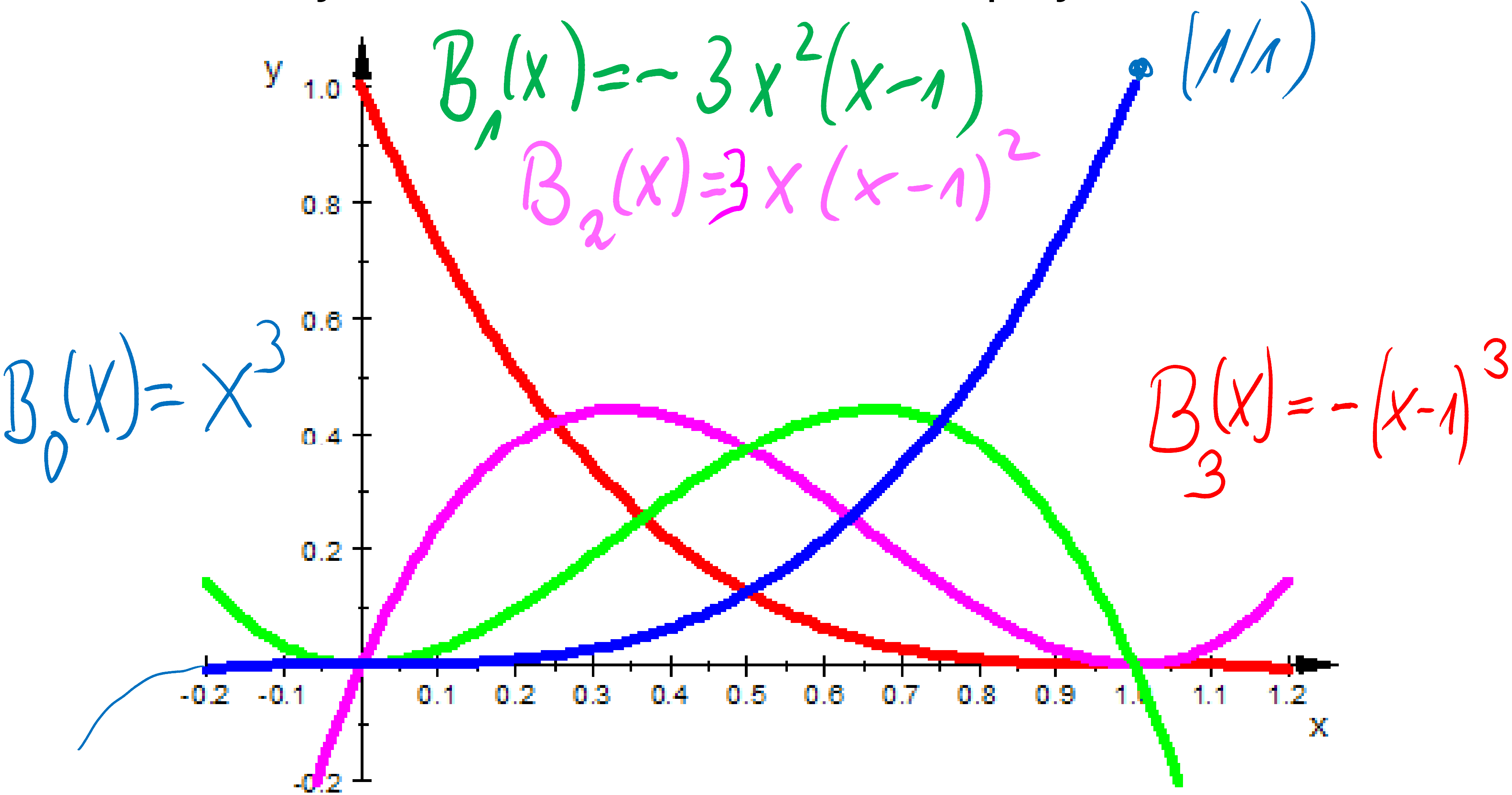
Bézier-Splines

Sie sind aus Bernstein-Polynomen aufgebaut.



Bézier Splines

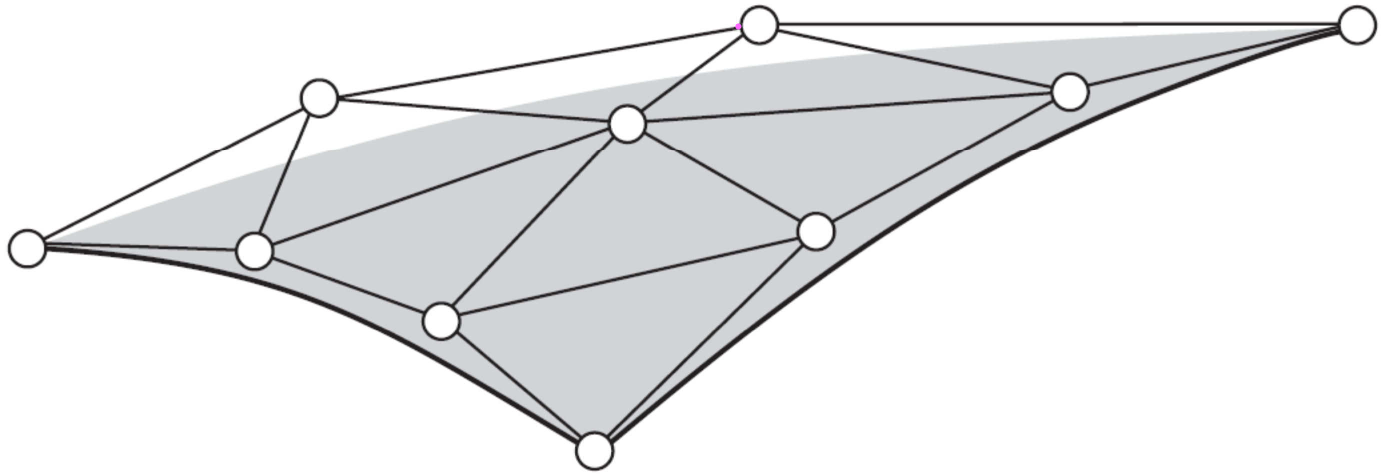
They are build out of Bernstein‘s polynomials.



Bézier-Splines

Von Pierre Étienne Bézier um 1960 für Renault entwickelt.

Bézier gilt als Begründer von CAD und CAM.



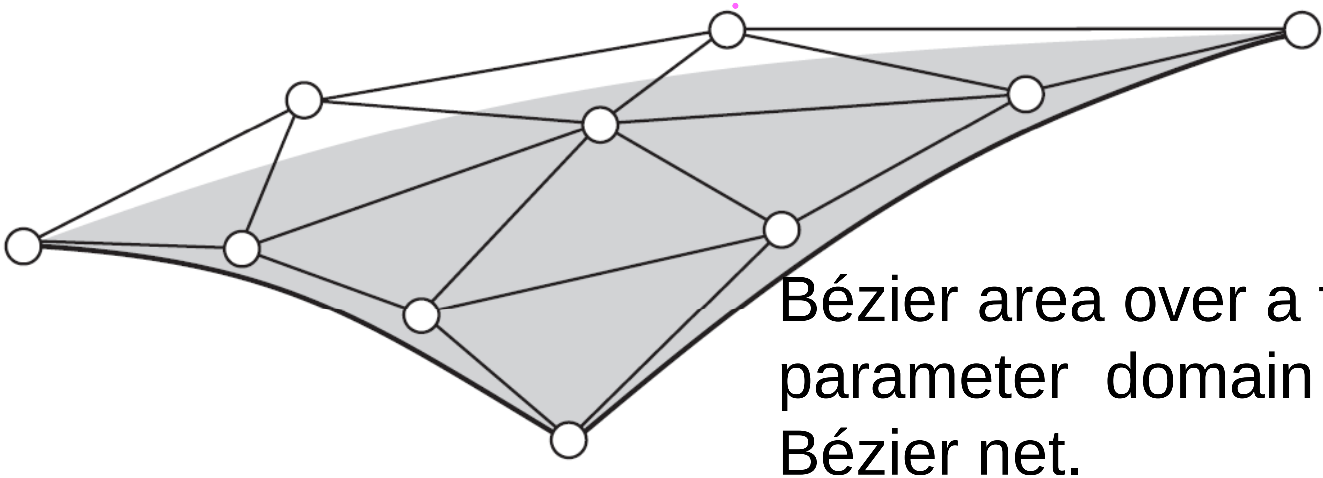
Bézierfläche über einem dreieckigen Parametergebiet mit ihrem Bézier-Netz

De Casteljau entwickelte entsprechendes für Citroen, durfte es aber nicht veröffentlichen.

Bézier Splines

Pierre Étienne Bézier developed them ca. at 1960 for Renault.

Bézier is known as founder of CAD and CAM.

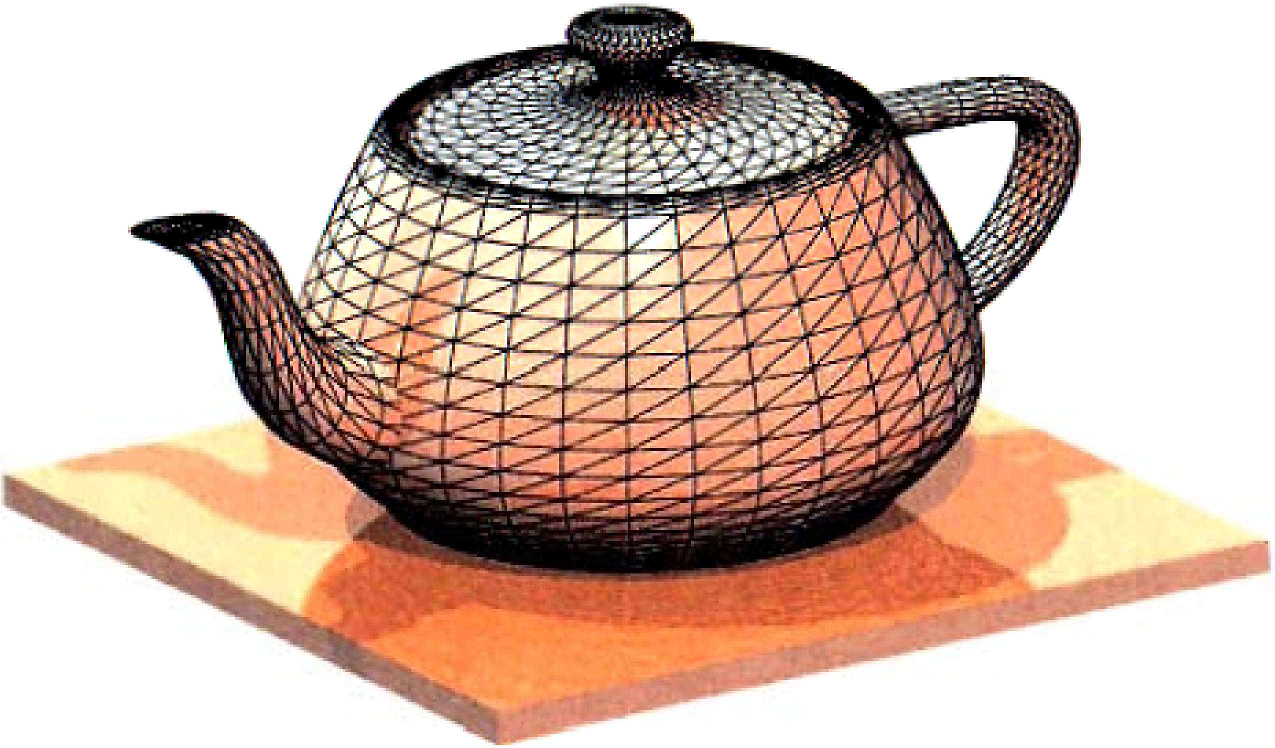


Bézier area over a triangulated parameter domain with its Bézier net.

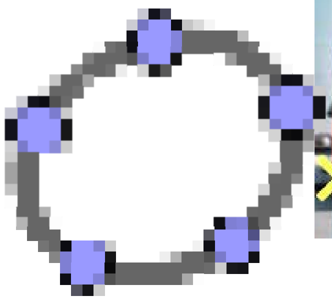
Bézierfläche über einem dreieckigen Parametergebiet mit ihrem Bézier-Netz

De Casteljau developed similar concepts for Citroen. He was not allowed to publish it.

CAD
Computer Aided Design



CAD
Computer Aided Design



Fallen und Fußangeln in der Numerik

Mit welcher Maschinengenauigkeit arbeitet Ihr Taschenrechner?

$$1+10^{-10}=erg,\quad erg-1=\ldots\ldots e_{10}$$

$$1+10^{-11}=erg,\quad erg-1=\ldots\ldots e_{11}$$

$$1+10^{-12}=erg,\quad erg-1=\ldots\ldots e_{12}$$

$$1+10^{-13}=erg,\quad erg-1=\ldots\ldots e_{13}$$

$$1+10^{-14}=erg,\quad erg-1=\ldots\ldots e_{14}$$

=0 ?

Die Maschinengenauigkeit MG ist die kleinste Zahl, deren Addition zu 1 von der Maschine noch gemerkt wird.

Ist e_{12} ungleich 0 aber e_{13} =0, dann ist MG=10^{-12}

Pittfalls and Mantraps in Numerics

With which machine precision does your calculator work?

$$1+10^{-10}=erg,\quad erg-1=......e_{10}$$

$$1+10^{-11}=erg,\quad erg-1=......e_{11}$$

$$1+10^{-12}=erg,\quad erg-1=......e_{12}$$

$$1+10^{-13}=erg,\quad erg-1=......e_{13}$$

$$1+10^{-14}=erg,\quad erg-1=......e_{14}$$

=0 ?

The machine pecision mp is the smallest number,
so that its addition to 1 can be showed in the machine.

If e_{12} is not equal 0, but e_{13} =0, then mp=10^{-12} .

Grundlagen der Numerik mit Computer

$100\sqrt{2}$ exakt

$141,421$ 3 Nachkommastellen, 6 tragende Ziffern

$0,00141421 \cdot 10^5$ 8 Nachkommastellen, 6 tragende Ziffern

Mantisse

Exponent

Basics of Numerics with Computer

$100\sqrt{2}$ exact

141.421 3 figures after the point, 6 bearing figures

$0.00141421 \cdot 10^5$ 8 figures after the point, 6 bearing figures

mantisse

exponent

Grundlagen der Numerik mit Computer

Gleitpunktzahl = floatingpoint number

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

Vor-
zeichen-
bit

11 Bit für den
Exponenten

52 Bit für die Mantisse

64 Bit für eine
Kommazahl

das sind 8 Byte

Das sind dann etwa 16 dezimale Stellen für die Mantisse

Die Zehnerpotenzen laufen etwa von 10^{+300} bis 10^{-300} .

Basics of Numerics with Computer

representation of a floating point number in our computers

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

one sign bit

11 bits for the exponent

52 bits for the mantisse

64 bit for one real number

That are 8 bytes.

So we have round about 16 decimal figures for the mantisse.

The powers of ten range ca. from 10^{+300} to 10^{-300} .

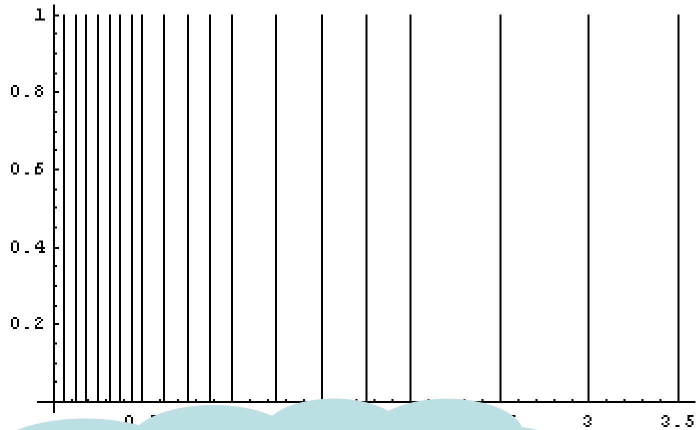
Grundlagen der Numerik mit Computer

Gleitpunktzahl = floatingpoint number

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

Das sind dann etwa 16 dezimale Stellen für die Mantisse

Die Zehnerpotenzen laufen etwa von 10^{+300} bis 10^{-300}.



Die Abstände zwischen den darstellbaren Zahlen werden immer größer.

Unterscheiden sich zwei reelle Zahlen erst nach mehr als 16 Stellen kann ihre Differenz nicht ordentlich berechnet werden.

Differenz-katastrophe

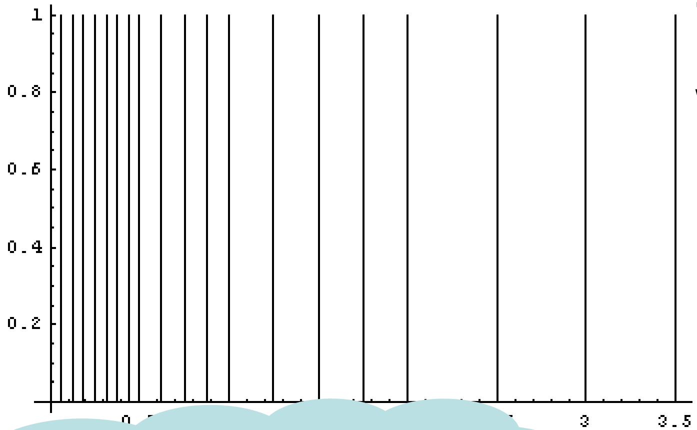
Basics of Numerics with Computer

representation of a floating point number in our computers

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

So we have round about 16 decimal figures for the mantisse.

The powers of ten range ca. from 10^{+300} to 10^{-300}.



The distances between the numbers which we can realize grow up.

If we have two real numbers, which are equal in the first 16 digits, then the following digits are not represented in the computer and we cannot calculate their difference correctly.

difference catastrophy

Fallen und Fußangeln in der Numerik

Beispiel für falsche Berechnungen
(Kulisch, Miranker[270]) http://www.logic.at/people/schuster/c01_0000.htm

$$-\frac{x^5 \cdot 2}{107751} + \frac{x^3}{35917} + \frac{1682 \cdot x \cdot y^4}{107751} + \frac{29 \cdot x \cdot y^2}{107751} + \frac{832}{107751}$$

Alle drei CAS-Werkzeuge liefern bei Eingabe von Naturlichen Zahlen für x und y das exakte Ergebnis 1783. Sie rechnen dann nämlich exakt mit der Bruchrechnung.

Zwingt man aber die Syteme, mit Kommazahlen zu rechnen, indem man *.0 bei wenigstens einer der Zahlen schreibt, kommen abenteuerlich falsche Ergebnisse heraus.

Auch dieses ist ein **Beispiel für eine Differenzkatastrophe**
Der x^5-Term ist nämlich negativ.

Vergleich der positiven und negativen Termteile	neg = 2*x^5 /. {x → 192119201, y -> 35675640} pos = 1682*x*y^4+3*x^3+29*x*y^2+832 /. {x → 192119201, y -> 35675640} 523 460 426 438 903 561 672 655 644 813 075 853 992 002 523 460 426 438 903 561 672 655 644 813 076 046 112 035 (pos - neg) / 107 751 1783 pos und neg stimmen in 32 Stellen überein.

Pittfalls and Mantraps in Numerics

Example for wrong calculation
(Kulisch, Miranker[270])

http://www.logic.at/people/schuster/c01_0000.htm

$$-\frac{x^5 \cdot 2}{107751}+\frac{x^3}{35917}+\frac{1682 \cdot x \cdot y^4}{107751}+\frac{29 \cdot x \cdot y^2}{107751}+\frac{832}{107751}$$

All the three CAS tools have as the exact result 1783, if you insert natural numbers for x and y. That's why the systems calculate exact with fractions.

But if you force the system to work with floating point arithmetic by putting decimal points in at least one number, then in all the systems large blunders arise.

That is an example for a difference catastrophe too.

That's why the x^5-Term is negative.

Matching of the negative and the positive term	neg = 2*x^5 /. {x → 192 119 201, y -> 35 675 640} pos = 1682*x*y^4 + 3*x^3 + 29*x*y^2 + 832 /. {x → 192 119 201, y -> 35 675 640} 523 460 426 438 903 561 672 655 644 813 075 853 992 002 523 460 426 438 903 561 672 655 644 813 076 046 112 035 (pos - neg) / 107 751 1783 pos and neg have the same digits in the 32 first positions.

Fallen und Fußangeln in der Numerik

z=	$-\frac{2\cdot x^5}{107751}+\frac{x^3}{35917}+\frac{1682\cdot x\cdot y^4}{107751}+\frac{29\cdot x\cdot y^2}{107751}+\frac{832}{107751}$

Mathematica	`z = (1682*x*y^4+3*x^3+29*x*y^2-2*x^5+832)/107751`
	$\frac{832+3x^3-2x^5+29xy^2+1682xy^4}{107751}$
	`z /. {x -> 192119201, y -> 35675640}`
	`z /. {x -> 192119201.0, y -> 35675640.0}`
	1783
	7.18056×10^{20}

MuPAD	`z|{x=192119201,y=35675640}`
	1783
	`z|{x=192119201.0,y=35675640.0}`
	$2.882303762\cdot10^{17}$

TI Nspire	$z:=\frac{1682\cdot x\cdot y^4+3\cdot x^3+29\cdot x\cdot y^2-2\cdot x^5+832}{107751}$ z|x=192119201 and y=35675640 ▸ 1783 z|x=192119201 and y=35675640. ▸ 9.28065632802E22

Pittfalls and Mantraps in Numerics

z=	$-\frac{2\cdot x^5}{107751}+\frac{x^3}{35917}+\frac{1682\cdot x\cdot y^4}{107751}+\frac{29\cdot x\cdot y^2}{107751}+\frac{832}{107751}$

Mathematica	`z = (1682*x*y^4+3*x^3+29*x*y^2-2*x^5+832)/107751`
	$\frac{832+3x^3-2x^5+29xy^2+1682xy^4}{107751}$
	`z /. {x → 192119201, y -> 35675640}`
	`z /. {x → 192119201.0, y -> 35675640.0}`
	1783
	7.18056×10^{20}

MuPAD	`z|{x=192119201,y=35675640}`
	1783
	`z|{x=192119201.0,y=35675640.0}`
	$2.882303762\cdot10^{17}$

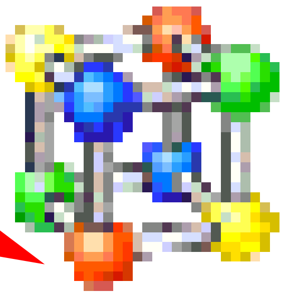
TI Nspire	$z:=\frac{1682\cdot x\cdot y^4+3\cdot x^3+29\cdot x\cdot y^2-2\cdot x^5+832}{107751}$ $z\|x=192119201$ and $y=35675640$ ▸ 1783 $z\|x=192119201$ and $y=35675640.$ ▸ 9.28065632802E22

Fallen und Fußangeln in der Numerik

$$-\frac{x^5\cdot 2}{107751}+\frac{x^3}{35917}+\frac{1682\cdot x\cdot y^4}{107751}+\frac{29\cdot x\cdot y^2}{107751}+\frac{832}{107751}$$

für x = 192119201 y = 35675640

Das war eine Differenzkatastrophe

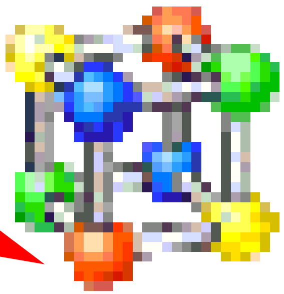


Pittfalls and Mantraps in Numerics

$$-\frac{x^5 \cdot 2}{107751}+\frac{x^3}{35917}+\frac{1682 \cdot x \cdot y^4}{107751}+\frac{29 \cdot x \cdot y^2}{107751}+\frac{832}{107751}$$

für x = 192119201   y = 35675640

That has been a
difference catastophe



Fallen und Fußangeln in der Numerik

$$\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y} \quad \blacktriangleright \text{ true,}$$

Das ist eine wahre Aussage, wie man mit der 3. binomischen Formel

$$x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y)$$ erkennt.

Das erkennen alle CAS-Werkzeuge.

$$\frac{100}{1011} \quad 0$$
$$\frac{1000}{100011} \quad 0$$
$$\frac{10000}{10000011} \quad 0$$
$$\frac{100000}{1000000011} \quad 0$$
$$\frac{1000000}{100000000011} \quad 0$$

$$\mathbf{a}(i):=(10)^{i}+(10)^{-i} \qquad \mathbf{b}(i):=(10)^{-(i+1)}$$

Setzt man für x=a und y=b das Obige ein, so ergibt sich für die linke Seite „Tannenbaumliste", ebenso für die rechte Seite und für die Differenz der Seiten logischerweise immer die Null.

$$\mathbf{a}(i):=(10.)^{i}+(10.)^{-i} \qquad \mathbf{b}(i):=(10.)^{-(i+1)}$$

Zwingt man aber das System durch die Dezimalpunkte Kommazahlen zu verwenden, also numerisch zu arbeiten, haben alle Systeme grobe Fehler.

Pittfalls and Mantraps in Numerics

$$\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y} \quad \text{▸ true,}$$

That is true statement fo each insert of real numbers x and y. You can see this with the 3. binomial formula.

$$x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y)$$

Every CAS tools recognizes this.

$$\frac{100}{1011} \quad 0$$
$$\frac{1000}{100011} \quad 0$$
$$\frac{10000}{10000011} \quad 0$$
$$\frac{100000}{1000000011} \quad 0$$
$$\frac{1000000}{100000000011} \quad 0$$

$$\mathbf{a}(i):=(10)^{i}+(10)^{-i} \qquad \mathbf{b}(i):=(10)^{-(i+1)}$$

If you insert for x this a and for y this b, so you receive the left side of the term above the left side list with the fractions. you receive the same list for the right side. Therefor the difference must be zero in every row.

$$\mathbf{a}(i):=(10.)^{i}+(10.)^{-i} \qquad \mathbf{b}(i):=(10.)^{-(i+1)}$$

But if you force the system to work with floating point arithmetic by putting decimal points in at least one number, then in all the systems large blunders arise.

Fallen und Fußangeln in der Numerik

Für i von 1 bis 10 ergibt sich:

MuPAD	Mathematica	TI Nspire
$-6.776263578 \cdot 10^{-21}$ $-8.470329473 \cdot 10^{-22}$ $-2.117582368 \cdot 10^{-22}$ $-6.6174449 \cdot 10^{-24}$ 0 0 $6.462348536 \cdot 10^{-27}$ $-8.077935669 \cdot 10^{-28}$ 0 0	$\{1.38778 \times 10^{-17}\}$ $\{0.\}$ $\{0.\}$ $\{0.\}$ $\{1.69407 \times 10^{-21}\}$ $\{0.\}$ $\{0.\}$ $\{1.65436 \times 10^{-24}\}$ $\{0.\}$ $\{-1.29247 \times 10^{-26}\}$	$\text{seq}\left(\frac{a(i)-b(i)}{(a(i))^2-(b(i))^2}=\frac{1}{a(i)+b(i)},i,1,10\right)$ {true,true,false,true,true,true,true,true,true,true} Nanu? Bei i=3 soll das falsch sein?? Differenz in Zahlenwerten: {0.,0.,-1.E-17,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.} Man darf nun nicht glauben, der TI Nspire wäre für die großen i besser, er steigt nämlich einfach aus genauerer Berechnung aus. Also: Dass hier nicht überall Null herauskommt, liegt an der **floating- point-Arithmetik**
Über all müsste 0 stehen, **dieser Fehler heißt Differenzkatastrophe**		

Pittfalls and Mantraps in Numerics

For i from 1 to 10 we get:

MuPAD	Mathematica	TI Nspire
$-6.776263578 \cdot 10^{-21}$	$\{1.38778 \times 10^{-17}\}$	$\mathrm{seq}\left(\frac{a(i)-b(i)}{(a(i))^2-(b(i))^2}=\frac{1}{a(i)+b(i)}, i, 1, 10\right)$
$-8.470329473 \cdot 10^{-22}$	$\{0.\}$	{true,true,false,true,true,true,true,true,true,true}
$-2.117582368 \cdot 10^{-22}$	$\{0.\}$	Hey? With i=3 the systen says „false" allthough the equation is true for each insert else???
$-6.6174449 \cdot 10^{-24}$	$\{0.\}$	Difference as numbers:
0	$\{1.69407 \times 10^{-21}\}$	{0.,0.,-1.E-17,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.}
0	$\{0.\}$	You shall not thinks that the TI Nspire is better for larger i than the other systems, It makes nothing with too small numbers. For b=0 the equation is trivially true.
$6.462348536 \cdot 10^{-27}$	$\{0.\}$	Conclusion: The result must be zero. The reason, that it is not so, is the numerical work with **floating point arithmetic**
$-8.077935669 \cdot 10^{-28}$	$\{1.65436 \times 10^{-24}\}$	
0	$\{0.\}$	
0	$\{-1.29247 \times 10^{-26}\}$	

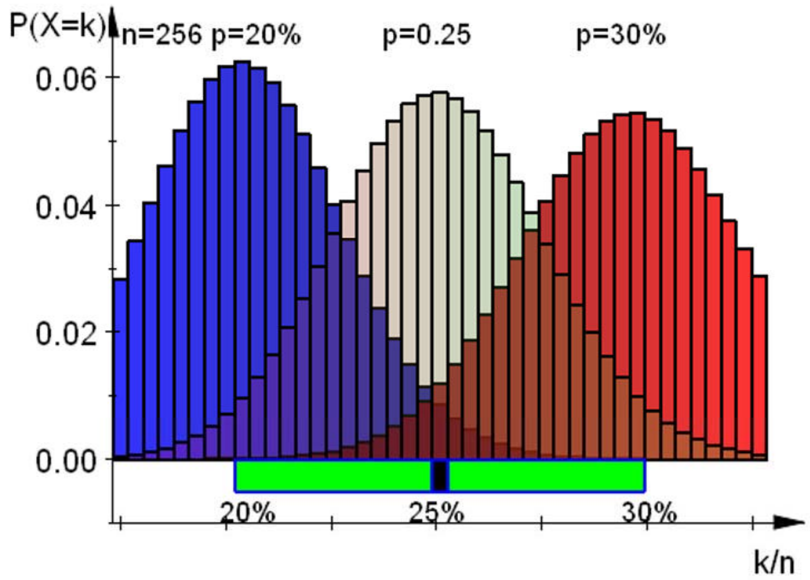
Fallen und Fußangeln in der Numerik

Konfidenzintervall

$$gl := \left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \frac{z}{n} \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \qquad n := 101$$

$$gl \;\blacktriangleright\; \frac{|101 \cdot p - 51|}{101} \leq \frac{2 \cdot \sqrt{-101 \cdot p \cdot (p-1)}}{101}$$

$$\text{solve}(gl, p) \;\blacktriangleright\; 0.407176 \leq p \leq 0.6023$$



Bei der Berechnung von Konfidenzintervallen kann es von Hand durch Runden leicht zur Differenzkatasprophe kommen. Eine solche Berechnung ist „schlecht konditioniert“.

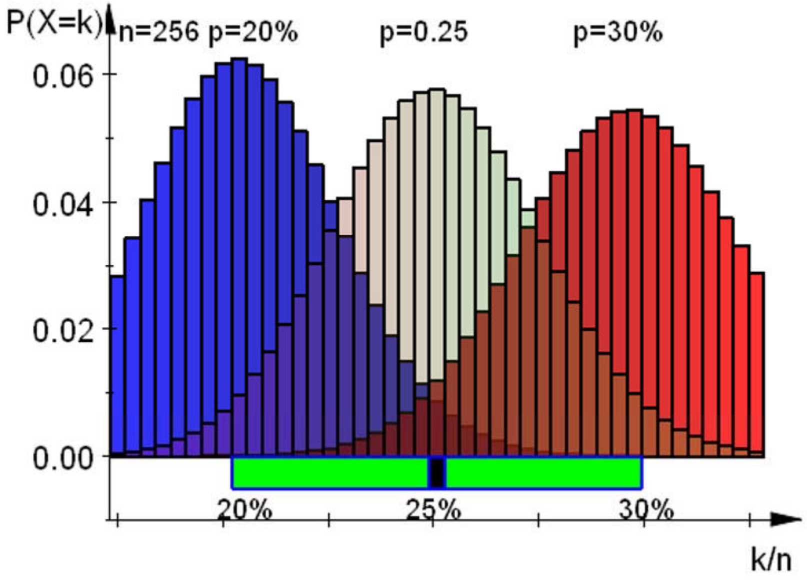
Pittfalls and Mantraps in Numerics

Konfidenzintervall

$$\mathbf{gl} := \left|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}} - p\right| \le \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{n}} \cdot \sqrt{\mathbf{n} \cdot p \cdot (1-p)} \qquad \mathbf{n} := 101$$

$$\mathbf{gl} \;\blacktriangleright\; \frac{|101 \cdot p - 51|}{101} \le \frac{2 \cdot \sqrt{-101 \cdot p \cdot (p-1)}}{101}$$

$$\text{solve}(\mathbf{gl}, p) \;\blacktriangleright\; 0.407176 \le p \le 0.6023$$

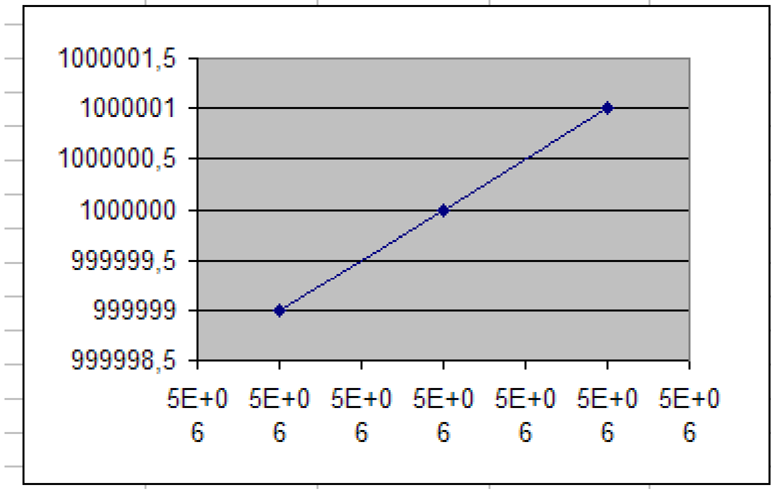


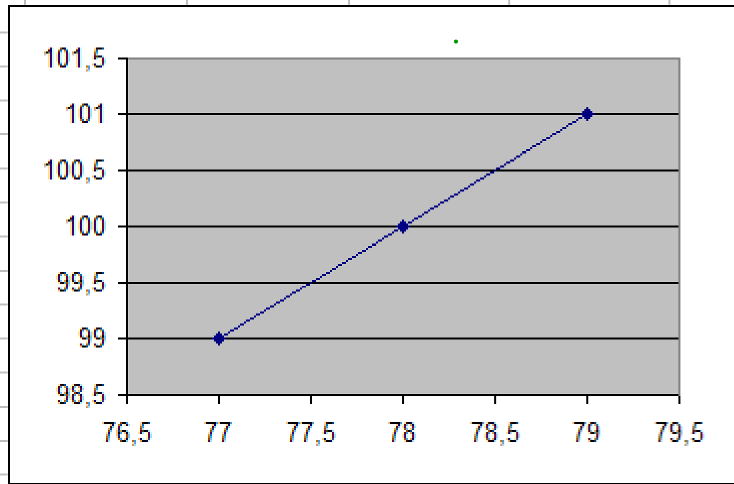
If you calculate a konfidence intervall by hand where you round same numbers, then it easy occure a difference catastrophe. Thuch a calculation is named „ill-conditioned“.

Weitere Pannen

x	y	x	y
5201477	999999	77	99
5201478	1000000	78	100
5201479	1000001	79	101

Wähle Trendlinie





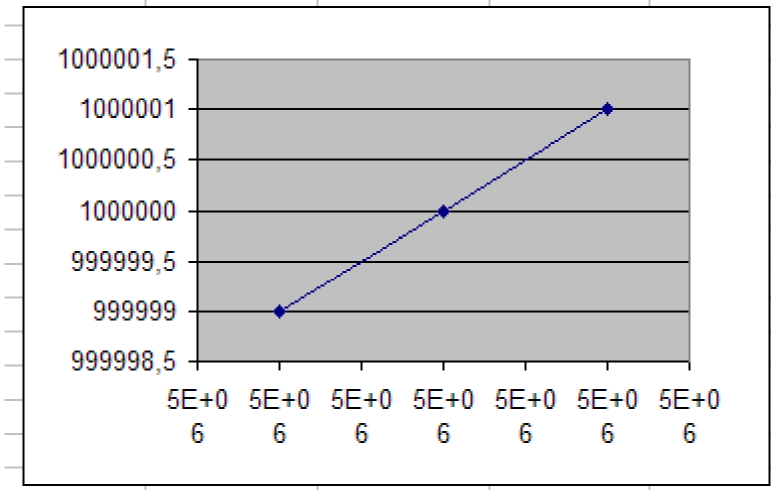
Option Daten verbinden

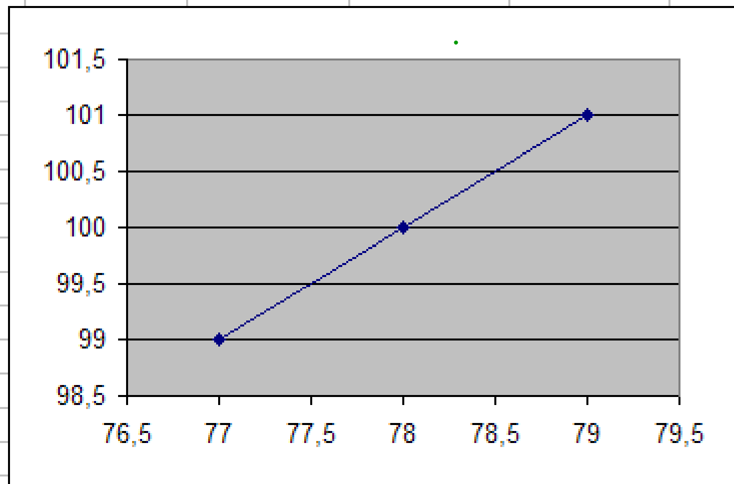
Klar, das ist beide Male eine Gerade

Excel

More Mishaps

x	y			x	y
5201477	999999			77	99
5201478	1000000			78	100
5201479	1000001			79	101
	Wähle Trendlinie				





Indeed, that are straight lines, both!

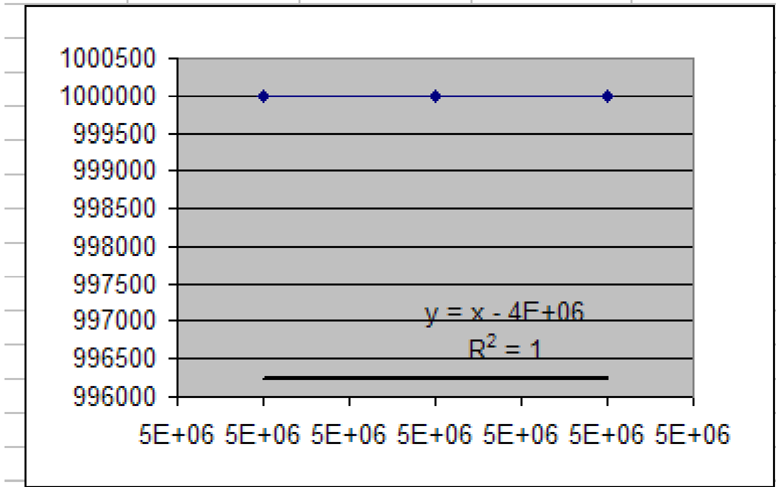
Option data connected

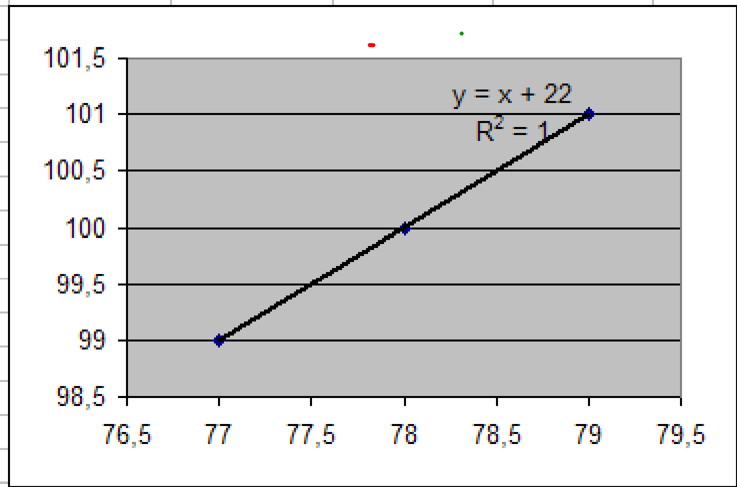
Excel

Weitere Pannen

x	y	x	y
5201477	999999	77	99
5201478	1000000	78	100
5201479	1000001	79	101

Wähle Trendlinie





Wähle „Trendlinie“ oder „lineare Regression“

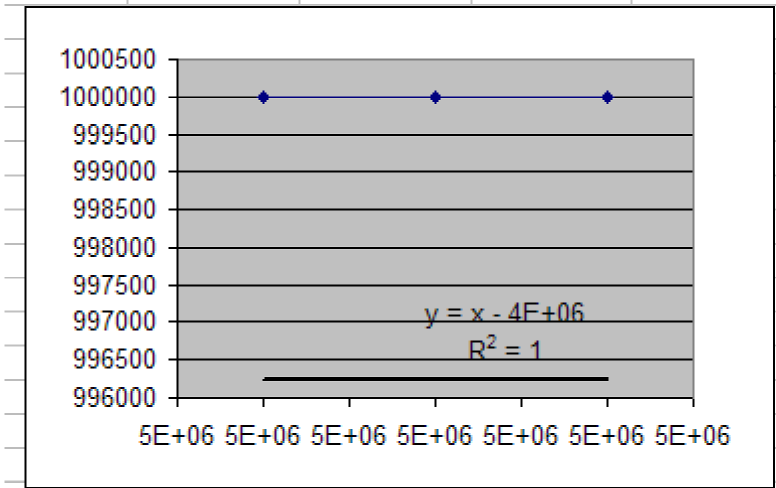
Dieselben Daten, aber

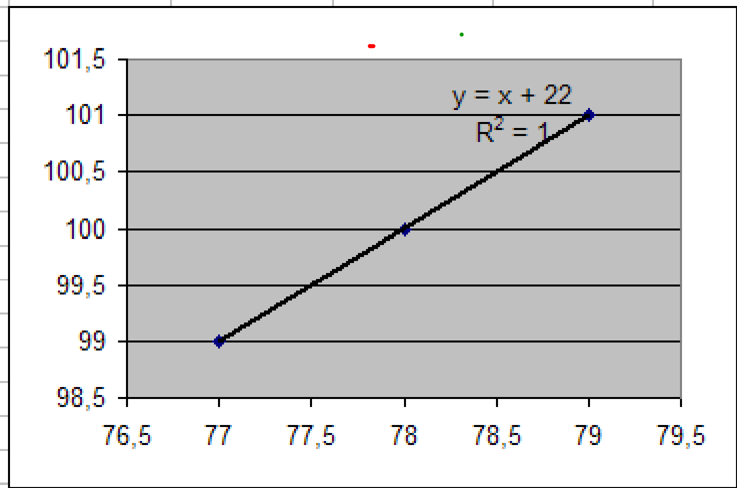
nicht gelungen, Panne

Excel

More Mishaps

x	y			x	y
5201477	999999			77	99
5201478	1000000			78	100
5201479	1000001			79	101
	Wähle Trendlinie				





choose „trend line“ or linear regression

then there is a mishap

Excel

Numerische Verfahren

Was man exakt nicht schafft, das macht man mit Numerik,

Hauptsache, man hat wenigstens Zahlen 'raus.

- Rekursive, b.z.w. iterative Konzepte
  - Heronverfahren für Wurzeln
  - Nullstellenverfahren (Mitten~, Sekanten~ , Newton~)
  - Modellierung von Prozessen (logistisch...)
  - Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Weitere Konzepte:

Numerische Integration, Taylorreihen,
Fourierreihen, Klangverarbeitung, ...
Finite-Element-methode, Simulationen,....

Numerical Methods

- What you cannot do exactly you can do it with numerics.
- The main thing: you have at least numbers as a result.

- recursive or iterative concepts
  - Heron‘s method for roots
  - zero methods (middle~, secant~ , Newton~)
  - modellierung of processes (logistic equation...)
  - numerical solution of differential equations

further concepts:

numerical integration, Taylor series, Fourier series,
sound converting, ...
finite-element method, simulations,....

Die Klothoide,
nur numerisch zu bewältigen

gegeben:

$$x = \int_0^t \cos \frac{x^2}{2A^2}\, dx, \;\; y = \int_0^t \sin \frac{y^2}{2A^2}\, dy \qquad (7.30)$$

Die Integrale lassen sich durch die Simpson'sche Näherungsformel berechnen.

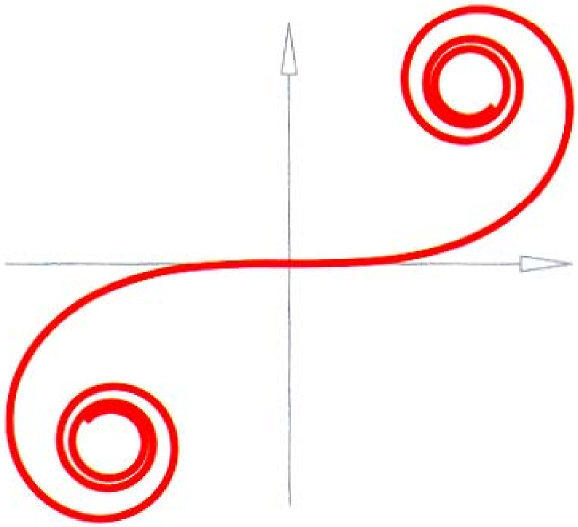


Abb. 7.46 Klothoide

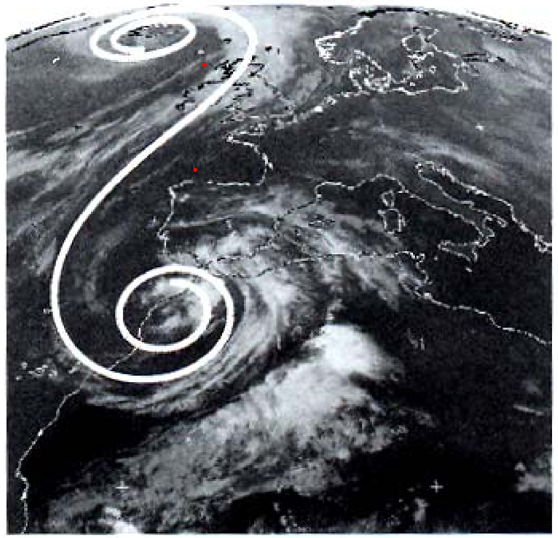


Abb. 7.47 Turbulenzen über dem Atlantik

Glaeser: Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik

The Clothoid,
only to manage in numerical manner

gegeben:

$$x = \int_0^t \cos \frac{x^2}{2A^2}\, dx, \quad y = \int_0^t \sin \frac{y^2}{2A^2}\, dy \qquad (7.30)$$

Die Integrale lassen sich durch die Simpson'sche Näherungsformel berechnen.

The integrals can be calculated by Simpson's formula.

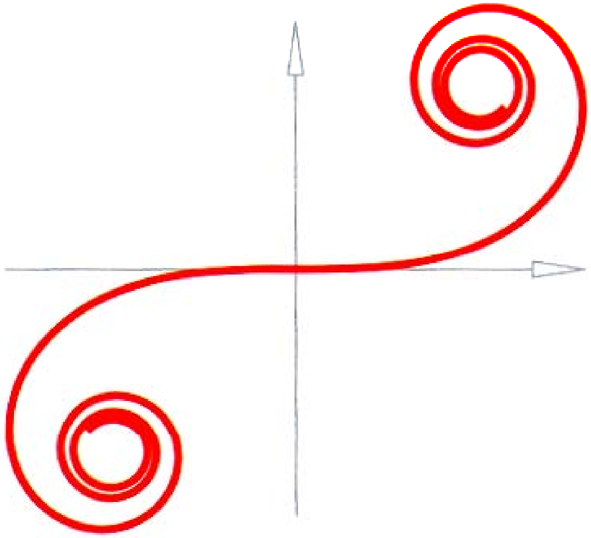


Abb. 7.46 Klothoide

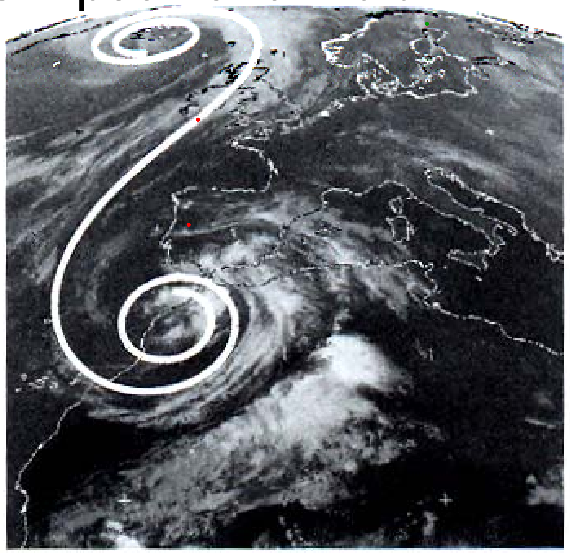


Abb. 7.47 Turbulenzen über dem Atlantik

Glaeser: Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik