Kubische Splines mit 4 Punkten

Prof. Dr. Dörte Haftendorn 2012 Definition eines kubischen Spines, der durch 4 frei ziehbare Punkte verläuft. A=[1,2]; B=[3,5]; C=[4,3]; D=[6,4] Die Punkte kann man sich als Nägel vorstellen, durch die der Spline laufen soll.

$\mathbf{apx}:=0 \blacktriangleright 0$ $\mathbf{bpx}:=3 \blacktriangleright 3$ $\mathbf{cpx}:=6 \blacktriangleright 6$ $\mathbf{dpx}:=10 \blacktriangleright 10$

$\mathbf{apy}:=0 \blacktriangleright 0$ $\mathbf{bpy}:=1 \blacktriangleright 1$ $\mathbf{cpy}:=4 \blacktriangleright 4$ $\mathbf{dpy} \blacktriangleright 6$

Das Handwerk zum Punktesetzen und "zugfest" machen ist auf Seite 2 des zweiten Problems der Datei lagrange-ti.tns beschrieben.

$\mathbf{p0}(x):=\mathbf{apy}+b0\cdot(x-\mathbf{apx})+\mathbf{c0}\cdot(x-\mathbf{apx})^2+d0\cdot(x-\mathbf{apx})^3 \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ Durch (apx, apy)

$\mathbf{p1}(x):=\mathbf{bpy}+b1\cdot(x-\mathbf{bpx})+c1\cdot(x-\mathbf{bpx})^2+d1\cdot(x-\mathbf{bpx})^3 \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ Durch (bpx, bpy)

$\mathbf{p2}(x):=\mathbf{cpy}+b2\cdot(x-\mathbf{cpx})+c2\cdot(x-\mathbf{cpx})^2+d2\cdot(x-\mathbf{cpx})^3 \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ Durch (cpx, cpy)

Damit erreicht jedes Polynom seinen "Startnagel".

1.1

$\mathbf{gl0}:=\mathbf{p0}(\mathbf{bpx})=\mathbf{bpy}$ ▸ $3\cdot b0+27\cdot d0=1$

$\mathbf{gl1}:=\mathbf{p1}(\mathbf{cpx})=\mathbf{cpy}$ ▸ $3\cdot b1+9\cdot c1+27\cdot d1+1=4$

$\mathbf{gl2}:=\mathbf{p2}(\mathbf{dpx})=\mathbf{dpy}$ ▸ $4\cdot b2+16\cdot c2+64\cdot d2+4=6$

Damit erreicht jedes Polynom seinen rechten Nachbarbagel

An den inneren Nägeln müssen die Polynome in der Steigung übereinstimmen.

$\mathbf{s0}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{p0}(x))$ ▸ *Fertig* $\mathbf{s1}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{p1}(x))$ ▸ *Fertig* $\mathbf{s2}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{p2}(x))$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{gl3}:=\mathbf{s0}(\mathbf{bpx})=\mathbf{s1}(\mathbf{bpx})$ ▸ $b0+27\cdot d0=b1$

$\mathbf{gl4}:=\mathbf{s1}(\mathbf{cpx})=\mathbf{s2}(\mathbf{cpx})$ ▸ $b1+6\cdot c1+27\cdot d1=b2$

An den inneren Nägeln müssen die Polynome in der Krümmung (also hier 2. Ableitung) übereinstimmen.

$\mathbf{ss0}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{s0}(x))$ ▸ *Fertig* $\mathbf{ss1}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{s1}(x))$ ▸ *Fertig* $\mathbf{ss2}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{s2}(x))$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{ss0}(x)$ ▸ $6\cdot d0\cdot x$ $\mathbf{ss1}(x)$ ▸ $6\cdot d1\cdot x+2\cdot(c1-9\cdot d1)$ $\mathbf{ss2}(x)$ ▸ $6\cdot d2\cdot x+2\cdot(c2-18\cdot d2)$

1.2

gl5:=**ss0**(**bpx**)=**ss1**(**bpx**) ▸ $18\cdot d0=2\cdot c1$

gl6:=**ss1**(**cpx**)=**ss2**(**cpx**) ▸ $2\cdot c1+18\cdot d1=2\cdot c2$

Gesucht sind 9 Variable, wir haben 7 Gleichungen. Also bleiben zwei Freiheiten.

Beim "natürlichen Spline" wird c0 auf 0 gesetzt. Das bedeutet, dass die Straklatte vorn keine Kümmung hat. **c0**:=0 ▸ 0

Ebenso wird bei p2 hinten verfahren:

hint:=**ss2**(**dpx**)=0 ▸ $2\cdot c2+24\cdot d2=0$ **lohint:=solve(hint,d2)** ▸ $d2=\frac{-c2}{12}$

Nun ist das lineare Gleichungsystem zu lösen:

lo:=solve({gl0,gl1,gl2,gl3,gl4,gl5,gl6,lohint},{b0,b1,b2,c1,c2,d0,d1,d2})

▸ $b0=\frac{41}{318}$ and $b1=\frac{118}{159}$ and $b2=\frac{287}{318}$ and $c1=\frac{65}{318}$ and $c2=\frac{-8}{53}$ and $d0=\frac{65}{2862}$ and $d1=\frac{-113}{2862}$ and $d2=\frac{2}{159}$

lo ▸ $b0=\frac{41}{318}$ and $b1=\frac{118}{159}$ and $b2=\frac{287}{318}$ and $c1=\frac{65}{318}$ and $c2=\frac{-8}{53}$ and $d0=\frac{65}{2862}$

1.3

$\mathbf{p0}(x)|\mathbf{lo} \blacktriangleright \frac{65\cdot x^3}{2862}+\frac{41\cdot x}{318}$ im Graphfenster blau, gilt von A bis B

$\mathbf{p1}(x)|\mathbf{lo} \blacktriangleright \frac{^-113\cdot x^3}{2862}+\frac{89\cdot x^2}{159}-\frac{493\cdot x}{318}+\frac{89}{53}$ im Graphfenster rot, gilt von B bis C

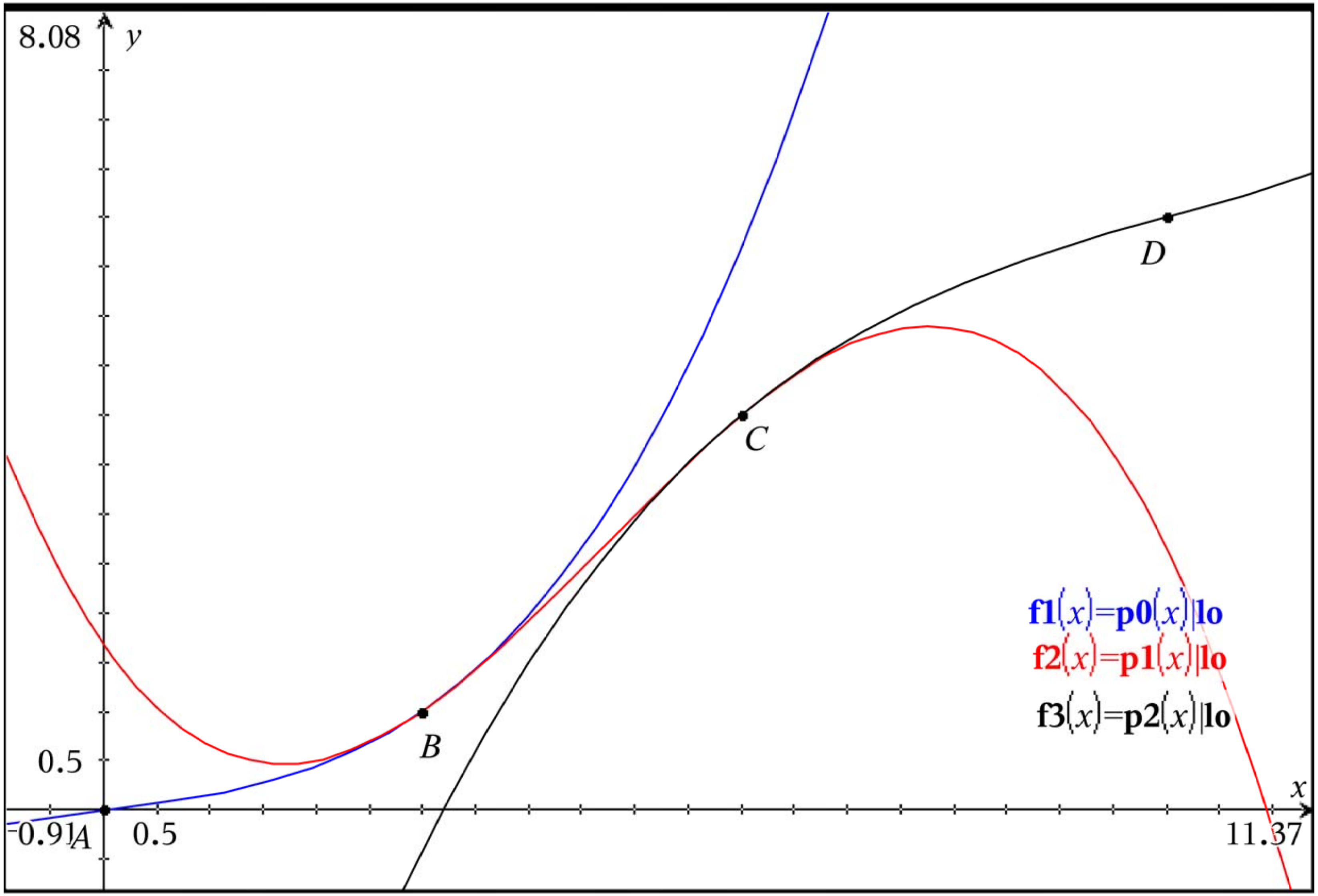
$\mathbf{p2}(x)|\mathbf{lo} \blacktriangleright \frac{2\cdot x^3}{159}-\frac{20\cdot x^2}{53}+\frac{1295\cdot x}{318}-\frac{507}{53}$ im Graphfenster schwarz, gilt von C bis

$\int \mathbf{p0}(x)|\mathbf{lo}\ dx \blacktriangleright \frac{65\cdot x^4}{11448}+\frac{41\cdot x^2}{636}$

$\int_{\mathbf{apx}}^{\mathbf{bpx}} \mathbf{p0}(x)|\mathbf{lo}\ dx+\int_{\mathbf{bpx}}^{\mathbf{cpx}} \mathbf{p1}(x)|\mathbf{lo}\ dx+\int_{\mathbf{cpx}}^{\mathbf{dpx}} \mathbf{p2}(x)|\mathbf{lo}\ dx \blacktriangleright 29.2248$

Das ist das Integral unter dem Spline.

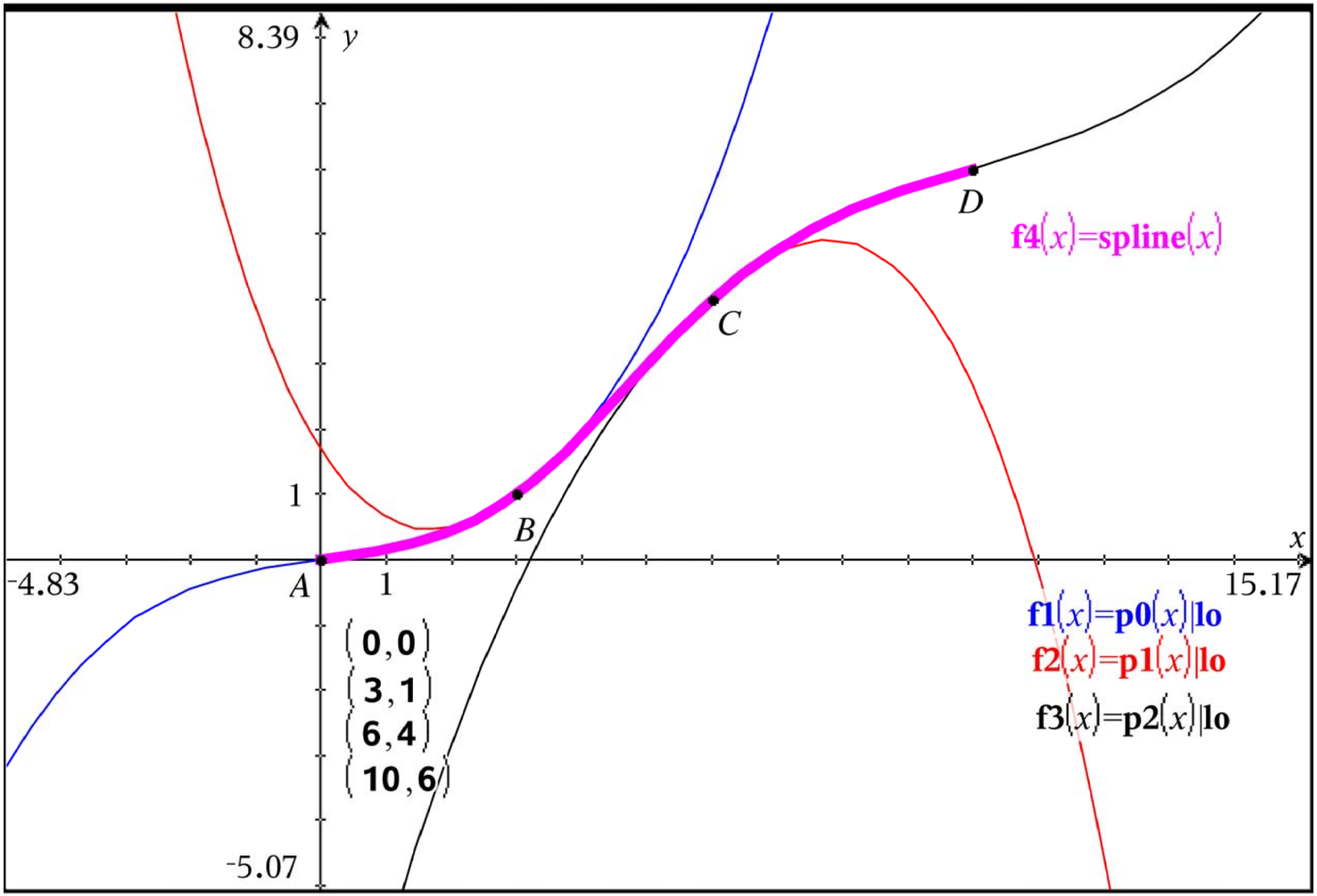
1.4



1.5

Der Spline alleine $\mathbf{spline}(x):=\begin{cases}\mathbf{p0}(x)|\mathbf{lo}, & \mathbf{apx}\le x\le \mathbf{bpx}\\ \mathbf{p1}(x)|\mathbf{lo}, & \mathbf{bpx}\le x\le \mathbf{cpx}\\ \mathbf{p2}(x)|\mathbf{lo}, & \mathbf{cpx}\le x\le \mathbf{dpx}\end{cases}$ ▸ *Fertig*

1.6


8.39
y
x
-4.83
15.17
-5.07
1
1
A
B
C
D
f4(x)=spline(x)
f1(x)=p0(x)|lo
f2(x)=p1(x)|lo
f3(x)=p2(x)|lo
(0,0)
(3,1)
(6,4)
(10,6)

1.7