Kubischer Spline 4 Pkte

Kubische Splines mit 4 Punkten

Prof. Dr. Dörte Haftendorn 2012 Definition eines kubischen Spines, der durch 4 frei ziehbare Punkte verläuft. A=[1,2]; B=[3,5]; C=[4,3]; D=[6,4] Die Punkte kann man sich als Nägel vorstellen, durch die der Spline laufen soll.

apx:=0 ▸ 0 bpx:=3 ▸ 3 cpx:=6 ▸ 6 dpx:=10 ▸ 10

apy:=0 ▸ 0 bpy:=1 ▸ 1 cpy:=4 ▸ 4 dpy ▸ 6

Das Handwerk zum Punktesetzen und "zugfest" machen ist auf Seite 2 des zweiten Problems der Datei lagrange-ti.tns beschrieben.

$p0(x):=apy+b0\cdot(x-apx)+c0\cdot(x-apx)^2+d0\cdot(x-apx)^3$ ▸ *Fertig* Durch (apx, apy)

$p1(x):=bpy+b1\cdot(x-bpx)+c1\cdot(x-bpx)^2+d1\cdot(x-bpx)^3$ ▸ *Fertig* Durch (bpx, bpy)

$p2(x):=cpy+b2\cdot(x-cpx)+c2\cdot(x-cpx)^2+d2\cdot(x-cpx)^3$ ▸ *Fertig* Durch (cpx, cpy)

Damit erreicht jedes Polynom seinen "Startnagel".

1.1

$gl0:=p0(bpx)=bpy$ ▸ $3\cdot b0+27\cdot d0=1$

$gl1:=p1(cpx)=cpy$ ▸ $3\cdot b1+9\cdot c1+27\cdot d1+1=4$

$gl2:=p2(dpx)=dpy$ ▸ $4\cdot b2+16\cdot c2+64\cdot d2+4=6$

Damit erreicht jedes Polynom seinen rechten Nachbarbagel

An den inneren Nägeln müssen die Polynome in der Steigung übereinstimmen.

$s0(x):=\frac{d}{dx}(p0(x))$ ▸ *Fertig* $s1(x):=\frac{d}{dx}(p1(x))$ ▸ *Fertig* $s2(x):=\frac{d}{dx}(p2(x))$ ▸ *Fertig*

$gl3:=s0(bpx)=s1(bpx)$ ▸ $b0+27\cdot d0=b1$

$gl4:=s1(cpx)=s2(cpx)$ ▸ $b1+6\cdot c1+27\cdot d1=b2$

An den inneren Nägeln müssen die Polynome in der Krümmung (also hier 2. Ableitung) übereinstimmen.

$ss0(x):=\frac{d}{dx}(s0(x))$ ▸ *Fertig* $ss1(x):=\frac{d}{dx}(s1(x))$ ▸ *Fertig* $ss2(x):=\frac{d}{dx}(s2(x))$ ▸ *Fertig*

$ss0(x)$ ▸ $6\cdot d0\cdot x$ $ss1(x)$ ▸ $6\cdot d1\cdot x+2\cdot(c1-9\cdot d1)$ $ss2(x)$ ▸ $6\cdot d2\cdot x+2\cdot(c2-18\cdot d2)$

1.2

$gl5:=ss0(bpx)=ss1(bpx)$ ▸ $18\cdot d0=2\cdot c1$

$gl6:=ss1(cpx)=ss2(cpx)$ ▸ $2\cdot c1+18\cdot d1=2\cdot c2$

Gesucht sind 9 Variable, wir haben 7 Gleichungen. Also bleiben zwei Freiheiten.

Beim "natürlichen Spline" wird c0 auf 0 gesetzt. Das bedeutet, dass die Straklatte vorn keine Kümmung hat. $c0:=0$ ▸ 0

Ebenso wird bei p2 hinten verfahren:

$hint:=ss2(dpx)=0$ ▸ $2\cdot c2+24\cdot d2=0$ lohint:=solve(hint,d2) ▸ $d2=\frac{^-c2}{12}$

Nun ist das lineare Gleichungsystem zu lösen:

lo:=solve({gl0,gl1,gl2,gl3,gl4,gl5,gl6,lohint},{b0,b1,b2,c1,c2,d0,d1,d2})

▸ $b0=\frac{41}{318}$ and $b1=\frac{118}{159}$ and $b2=\frac{287}{318}$ and $c1=\frac{65}{318}$ and $c2=\frac{^-8}{53}$ and $d0=\frac{65}{2862}$ and $d1=\frac{^-113}{2862}$ and $d2=\frac{2}{159}$

lo ▸ $b0=\frac{41}{\ldots}$ and $b1=\frac{118}{\ldots}$ and $b2=\frac{287}{\ldots}$ and $c1=\frac{65}{\ldots}$ and $c2=\frac{^-8}{\ldots}$ and $d0=\frac{65}{\ldots}$

1.3

$p0(x)|lo$ ▸ $\frac{65\cdot x^3}{2862}+\frac{41\cdot x}{318}$ im Graphfenster blau, gilt von A bis B

$p1(x)|lo$ ▸ $\frac{^-113\cdot x^3}{2862}+\frac{89\cdot x^2}{159}-\frac{493\cdot x}{318}+\frac{89}{53}$ im Graphfenster rot, gilt von B bis C

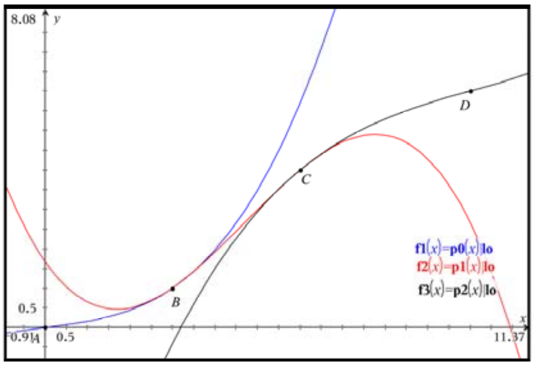
$p2(x)|lo$ ▸ $\frac{2\cdot x^3}{159}-\frac{20\cdot x^2}{53}+\frac{1295\cdot x}{318}-\frac{507}{53}$ im Graphfenster schwarz, gilt von C bis

$\int p0(x)|lo\, dx$ ▸ $\frac{65\cdot x^4}{11448}+\frac{41\cdot x^2}{636}$

$\int_{apx}^{bpx} p0(x)|lo\, dx+\int_{bpx}^{cpx} p1(x)|lo\, dx+\int_{cpx}^{dpx} p2(x)|lo\, dx$ ▸ 29.2248

Das ist das Integral unter dem Spline.

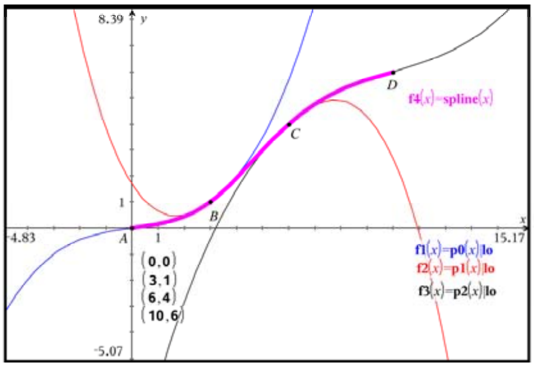
1.4



1.5

Der Spline alleine $spline(x):=\begin{cases} p0(x)|lo, & apx\le x\le bpx \\ p1(x)|lo, & bpx\le x\le cpx \\ p2(x)|lo, & cpx\le x\le dpx \end{cases}$ ▸ *Fertig*

1.6



1.7