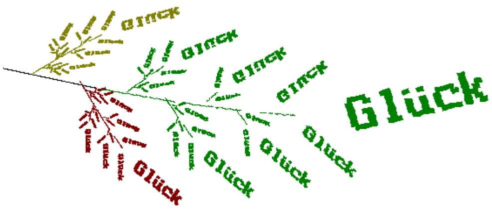
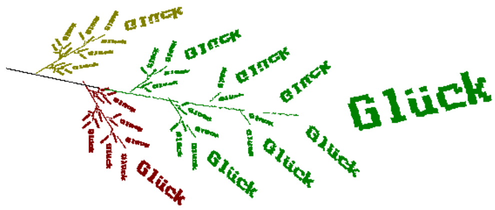
Mathematik für alle



Mathematics for Everyone

This is a fractal with the word „luck“



Mathematik für Kinder

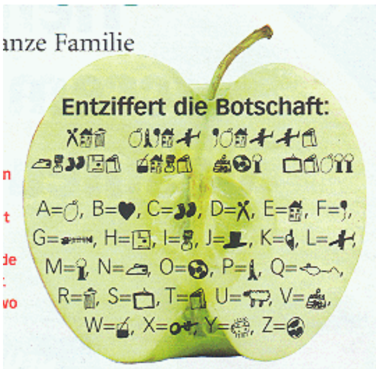
auf der Kinderseite
einer Kundenzeitung

Mathematics for Children

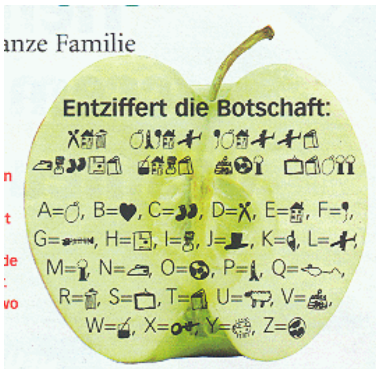
Decode the message:

in the children's page
of commercial newspaper

Mathematik echt leicht



Mathematics is Easy



Solution:
Der Apfel faellt
nicht weit vom Stamm

a german idiomatic expression:

The apple falls not
far from the tree

Cäsarcode, Urtyp der Kryptografie

MATHE

Schlüssel-
Buchstabe

über das A stellen

Kryptogramm-Buchstaben

Klartext-Buchstaben

Caesar‘s code, Prototype of the Cryptographic Methods

keyletter

MATHE

Schlüssel-
Buchstabe

put it over the A

über das A stellen

letters of the ciphertext
Kryptogramm-Buchstaben

Klartext-Buchstaben letters of the plaintext

do it yourself: caesarcode

MATHE
DRKYV

Schlüssel-
Buchstabe

über das A stellen

Kryptogramm-Buchstaben

Klartext-Buchstaben

Caesar‘s Code, the Origin of the Cryptography

keyletter

MATHE
DRKYV

Schlüssel-
Buchstabe

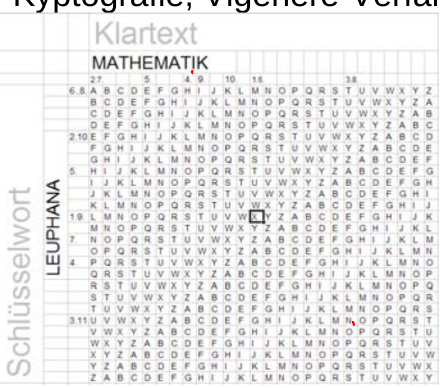
put it over the A

über das A stellen

letters of the ciphertext
Kryptogramm-Buchstaben

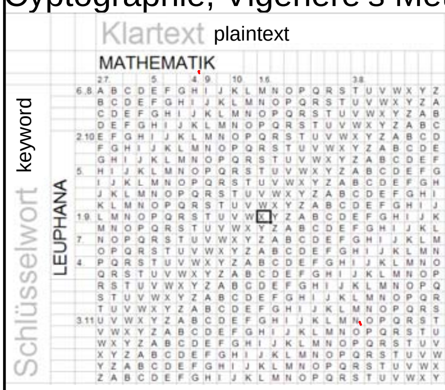
Klartext-Buchstaben letters of the plaintext

Kyptografie, Vigenère-Verfahren um 1550



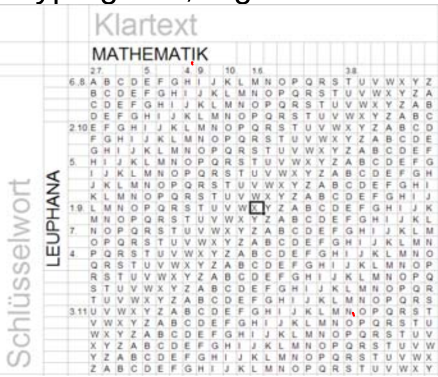
Kryptogramm:

Cyptographie, Vigenère‘s Method um 1550



Kryptogramm:
ciphertext:

Kyptografie, Vigenère-Verfahren um 1550

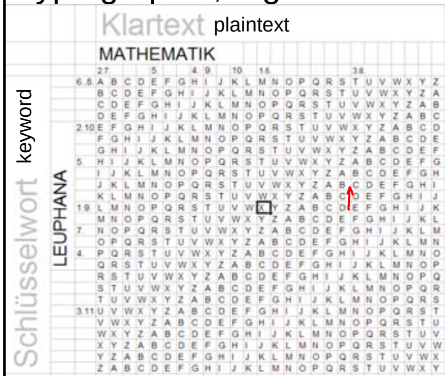


Kryptogramm:

XENWLMNTTO

DYJTY

Cyptographie, Vigenère's Method



ciphertext:

XENWLMNTTO

DYJTY

Kyptografie macht sich auf den Weg

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

MATHE

4735544239

INFO: Der ASCII-Code ist die übliche Codierung des Alphabetes.
Die großen Buchstaben reichen von 65 bis 90, dann folgen die kleinen Buchstaben.
Hier ist die Zahl 30 vom ASCII-Code abgezogen, damit man zweistellig bleibt.

Cyptography Goes On

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

MATHE

4735544239

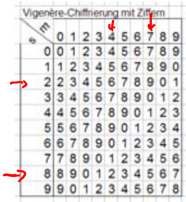
INFO: The ASCII-Code is the usual way to realise letters and sign in the computer.
The big Letters have the Mumbers 65 to 90, then the small letters follow.
The number 30 is subtracted from ASCII-Code here, so that two figures are enough.

Kyptografie macht sich auf den Weg

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

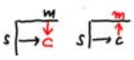
MATHE



Klartext m 4735544239

Schlüssel s 2846935817

frei erfunden

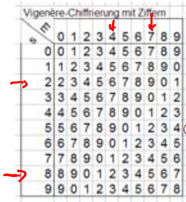


Cyptography Goes On

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

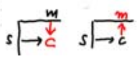
MATHE



plaintext m 4735544239

key s 2846935817

free chosen



Zahlen ermöglichen gute Kryptografie

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Vigenère-Chiffrierung mit Ziffern

s \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

MATHE

Klartext m 4735544239

Schlüssel s 2846935817

65714

+rechnen

modulo 10

19

Numbers are Good for Good Cryptography

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Vigenère-Chiffrierung mit Ziffern

s \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

MATHE

plaintext m 4735544239

key s 2846935817

65714

you habe to add it without transfer 10

modulo 10

20

Zahlen ermöglichen gute Kyptografie

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Vigenère-Chiffrierung mit Ziffern

s \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

MATHE

Klartext m 4735544239

Schlüssel s 2846935817

c = 657147 . . . . .

c = 6781

s = 2846

m =

21

Numbers are Good for Good Cryptography

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Vigenère-Chiffrierung mit Ziffern

s \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

MATHE

plaintext m 4735544239

key s 2846935817

c = 657147 . . . . .

c = 6781

s = 2846

m =

22

Rechnen geht besser als Ablesen

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

MATHE

Die Tabelle können wir vergessen, man kann das ganz einfach auch ausrechnen!

Klartext m 4735544239

Schlüssel s 2846935817

Ziffernweise ohne Übertrag addieren

c = 6571 . . . . .

$m_z + s_z = c_z$

Ziffernweise abziehen „modulo 10“

$c_z - s_z = m_z$

c = 6781 4697

s = 2846 9358

m = 4945

23

To Add is Better than to Read Vigenère‘s Table

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

MATHE

Forget the table, it is easier to add it (without transfer the 10)

plaintext m 4735544239

key s 2846935817

add the figures and drop the tens

c = 6571 . . . . .

$m_z + s_z = c_z$

subtract the figures take a 10 if you need „modulo 10“

$c_z - s_z = m_z$

c = 6781 4697

s = 2846 9358

m = 4945

24

Rechnen geht besser als Ablesen

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

MATHE

Die Tabelle können wir vergessen, man kann das ganz einfach auch ausrechnen!

Klartext m 4735544239

Schlüssel s 2846935817

Ziffernweise ohne Übertrag addieren

C = 6571479046

$m_Z + s_Z = c_Z$

$c_Z - s_Z = m_Z$

Ziffernweise abziehen „modulo 10“

C = 67814697

S = 28469358

m = 49455349

25

To Add is Better than to Read Vigenère‘s Table

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

MATHE

Forget the table, it is easier to add it (without transfer the 10)

plaintext m 4735544239

key s 2846935817

add the figures and drop the tens

C = 6571479046

$m_Z + s_Z = c_Z$

$c_Z - s_Z = m_Z$

subtract the figures take a 10 if you need „modulo 10“

C = 67814697

S = 28469358

m = 49455349

26

Kyptografisches Protokoll

one-time-pad (dezimal)

- Vorbereitungsphase
  Anton und Berta vereinbaren einen Schlüssel
- Anwendungsphase: Verschlüsselung (encryption)
  1. Anton übersetzt einen Klartext in eine Zahl m
  2. Er addiert ziffenweise „modulo 10“ (d.h. ohne Übertrag) den Schlüssel s
  3. Das Ergebnis c schickt er Berta.
- Entschlüsselung (decryption)
  1. Berta subtrahiert ziffernweise „modulo 10“ den Schlüssel von dem Krytogramm c und erhält m
  2. Sie übersetzt m zurück in Buchstaben und liest.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

$m_Z + s_Z = c_Z$

$c_Z - s_Z = m_Z$

27

Cryptographic Protokoll

one-time-pad (decimal)

- preparation phase
  Anton and Berta agree on a key
- application phase: encryption
  1. Anton translates a plaintext in a Number m
  2. He adds figurewise „modulo 10“ (without take 10) the key s
  3. He sends the result, the ciphertext, c to Berta.
- decryption
  1. Berta subtracts „modulo 10“ the key from the ciphertext. The result ist the message m.
  2. She translates m back in letters ans reads the message.

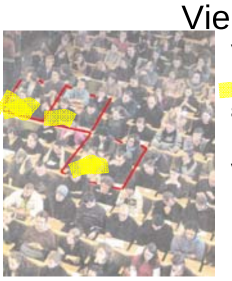
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

$m_Z + s_Z = c_Z$

$c_Z - s_Z = m_Z$

28

Vierer-Übung

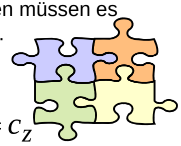


Vier Studis bilden eine Gruppe

Rechts-Unten sagt den Schlüssel an.
8 Stellen zufällig

Die, die nebeneinander sitzen, verschlüsseln ein Wort mit 4 Buchstaben.

Die beiden anderen müssen es herausbekommen.



6 Minuten

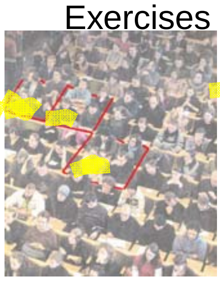
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

$m_Z + s_Z = c_Z$

$c_Z - s_Z = m_Z$

29

Exercises with Four Students

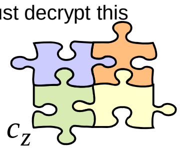


Four students build a group.

Right-down says an arbitrary key.
8 figures randomly

The students, which are neighbours, encrypt one word whith 4 letters.

The two others must decrypt this word.



6 minutes

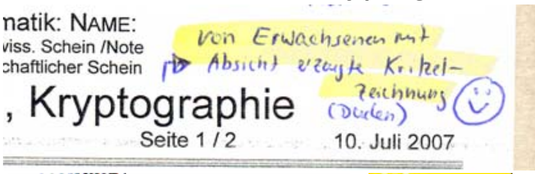
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

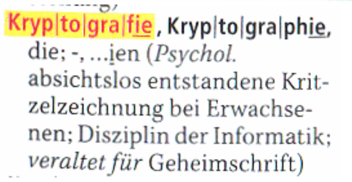
$m_Z + s_Z = c_Z$

$c_Z - s_Z = m_Z$

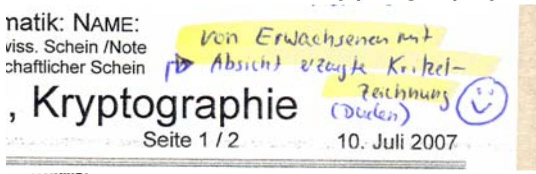
30

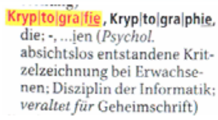
Was ist moderne Kyptografie?




Kryp|to|gra|fie, Kryp|to|gra|phie, die; -, ...ien (*Psychol.* absichtslos entstandene Kritzelzeichnung bei Erwachsenen; Disziplin der Informatik; *veraltet für* Geheimschrift)

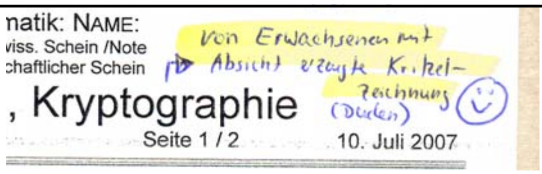
What is Modern Cryptography?




Kryp|to|gra|fie, Kryp|to|gra|phie, die; -, ...ien (*Psychol.* absichtslos entstandene Kritzelzeichnung bei Erwachsenen; Disziplin der Informatik; *veraltet für* Geheimschrift)

It ist a very special joke, that one can read important german dictionary: cryptography is a randomly made scratching of adults.

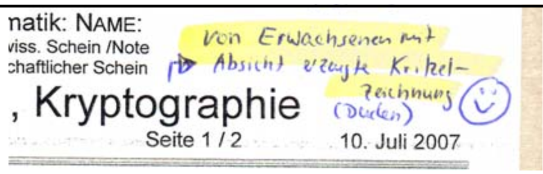
The goal of this lecture is, to enable people to know it better.



Was ist moderne Kryptografie?

- treibt das Rechnen auf die Spitze
- verwendet riesige Zahlen von 200 Stellen Länge
- werkelt mit Primzahlen
- erzeugt das Kryptogramm und die Schlüssel durch Rechnungen
- die Rechnungen laufen „modulo n“, im Restklassen ring von n

Das wird jetzt erkärt:

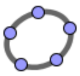


What is modern cryptography?

- high end calculating with numbers
- takes giant numbers with 200 figures
- handles with primnumbers
- produce the ciphertext and the keys only with calculating
- calculation is „modulo n“, in residue class ring on n

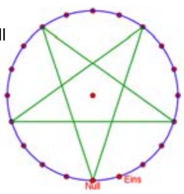
This will be explained:

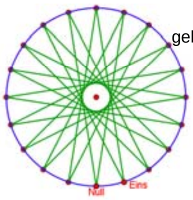
modulo 20 was bedeutet das?



Die Vielfachen von 8 bzw. 9 modulo 20
Es geht nur um die Reste beim Teilen durch 20.

gehe von Null
8 Schritte
und
8 Schritte
u.s.w.
…



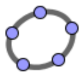


gehe von Null
9 Schritte
und
9 Schritte
u.s.w.
…

In Z {0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136, 144, 152, 160, 168, 1

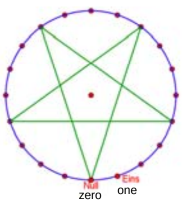
In Z(20) {0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12,

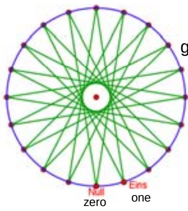
modulo 20 what is it?



The multiples of 8 (left) and 9 (right) modulo 20
Importend are only the residues in divison by 20.

go from zero
8 steps
and 8 steps
and so on
…





go from zero
9 steps
and 9 steps
and so on
…

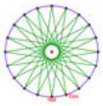
In Z {0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136, 144, 152, 160, 168, 1

In Z(20) {0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12,

modulo n
was bedeutet das?

Die Vielfachen von 8 bzw. 9 modulo 20
Es geht nur um die Reste beim Teilen durch 20.

n = 20



8 hat einen gemeinsamen Teiler mit 20, nämlich 4.

9 hat keinen gemeinsamen Teiler mit 20

Es bleiben Punkte übrig.

Es bleiben keine Punkte übrig.

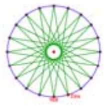
In Z {0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136, 144, 152, 160, 168, 1

In Z(20) {0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12,

modulo n
what is it?

The multiples of 8 (left) and 9 (right) modulo 20
Importend are only the residues in divison by 20.

n = 20



8 has a common divisor with 20, namely 4.

9 don't have a commom divisor with 20

There are points in the circle without lines.

All points in the circle get lines.

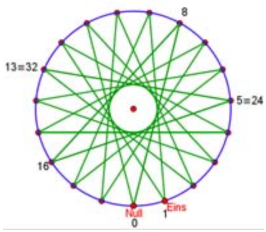
In Z {0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136, 144, 152, 160, 168, 1

In Z(20) {0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12, 0, 8, 16, 4, 12,

modulo n: was bedeutet das?

n = 19

Die Vielfachen von 8 modulo 19



Keine Zahl $1 < z < 19$ hat einen gemeinsamen Teiler mit 19.

Darum wird immer jeder Punkt erreicht.

Es bleiben nie Punkte übrig.

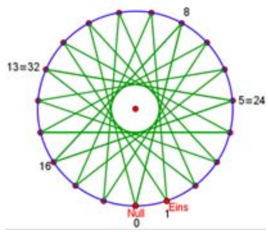
19 ist eine Primzahl

Eine Primzahl p ist eine Zahl mit genau zwei Teilern: 1 und p.

modulo n: what is it?

n = 19

The multiples of 8 modulo 19



No Number $1 < z < 19$ has a common divisor with 19.

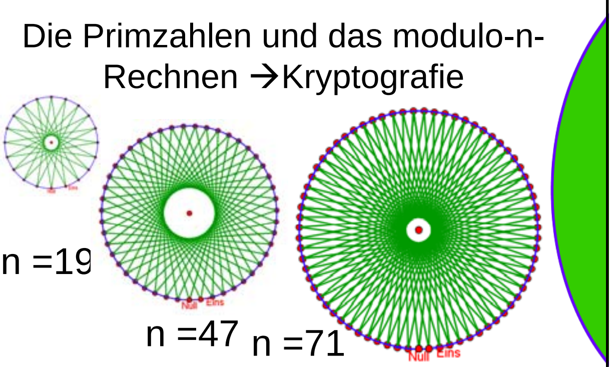
Therefore in all cases every point ist reached.

No points are left.

19 is a prime number

A prime number p is a number with exact two divisors: 1 and p.

Die Primzahlen und das modulo-n-Rechnen →Kryptografie

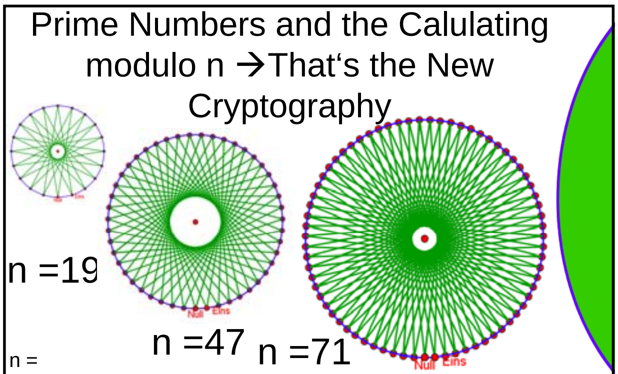


n =19

n =47 n =71

n = **2215423210133901255819665817640755964410689554395491246785059219278055298497 67**

Prime Numbers and the Calulating modulo n →That's the New Cryptography



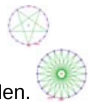
n =19

n =47 n =71

n =
251535285795055004644552233674991216717754459477884467104369027866457316690323872601396263900552169184402002146582419756137977860863538917211838281136977

Erklärung zur letzten Folie:

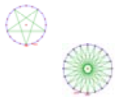
- Für jede Zahl n denkt man sich den Kreis der Zahlen als Punkte {0,1,2,3,….. n-1} auf dem Zifferblatt einer Uhr.
- Beim Rechnen modulo n kommen nur diese Zahlen vor. Ihre Menge bezeichnet man mit $\mathbb{Z}_n$. ($\mathbb{Z}$ sind die ganzen Zahlen)
- Die Vielfachen einer Zahl t lassen manchmal Punkte aus. Das ist für die Kryptografie ungünstig.
- Bei Primzahlen kann das nicht passieren, darum sind Primzahlen so wichtig für die Kryptografie.



- In der Kryptografie verwendet man riesige Primzahlen.
- Der ganz große Kreis rechts müsste für das angegebene n (etwa 10^{150}) viel mehr Punkte haben, als im Universum Atome (etwa 10^{77}) sind.

Explanation of the Last Slide:

- We think for every number n a circle of numbers with points {0,1,2,3,….. n-1} as a face plate of a clock.
- When we calculate modulo n the are only this numbers. We name the set of these numbers $\mathbb{Z}_n$. ($\mathbb{Z}$ are the integers)
- The multiples of a number t sometimes leap some points. This is awkward for cryptography.
- With prime numbers this is impossible. Thats why prime numbers are so important for cryptography



- In cryptography one take giant prime numbers Primzahlen.
- For the given n (ca. 10^{150}) the biggest circle at the right must have more points than the universe has atoms (ca. 10^{77}).

Jetzt: Kopfrechnen mit den Resten beim Teilen durch n: das ist Rechnen modulo-n

$17 \underset{5}{\equiv} 2$ 17 modulo 5 ist 2 / 17 ist gleich 2 modulo 5 / 17 ist kongruent 2 modulo 5 $\mathrm{mod}(17\,,5)=2$ $17 \equiv 2 \bmod 5$

5 heißt „Teiler“ oder „modulo-Zahl“

$54 \underset{10}{\equiv}$ $54 \underset{7}{\equiv}$ $113 \underset{11}{\equiv}$ $73 \underset{11}{\equiv}$ $777730 \underset{11}{\equiv}$

Ganze Vielfache von n weglassen!

Now: Mental Arithmetic with the Rests by Dividing by n: That is modulo n Calculation.

$17 \underset{5}{\equiv} 2$ 17 modulo 5 equals 2 / 17 equals 2 modulo 5 / 17 is congruent 2 modulo 5 $\mathrm{mod}(17\,,5)=2$ $17 \equiv 2 \bmod 5$

5 is the „divisor“ or „modulo-number“

$54 \underset{10}{\equiv}$ $54 \underset{7}{\equiv}$ $113 \underset{11}{\equiv}$ $73 \underset{11}{\equiv}$ $777730 \underset{11}{\equiv}$

leave whole multiples of n!

Jetzt: Kopfrechnen mit den Resten beim Teilen durch n: das ist Rechnen modulo-n

$17 \underset{5}{\equiv} 2$ 17 modulo 5 ist 2 / 17 ist gleich 2 modulo 5 / 17 ist kongruent 2 modulo 5 $\mathrm{mod}(17\,,5)=2$ $17 \equiv 2 \bmod 5$

5 heißt „Teiler“ oder „modulo-Zahl“

$54 \underset{10}{\equiv} 4$

$54 \underset{7}{\equiv} 5$

$113 \underset{11}{\equiv} 3$

$73 \underset{11}{\equiv} 66+7 \underset{11}{\equiv} 7$

$777730 \underset{11}{\equiv} 777700+30 \underset{11}{\equiv} 30 \underset{11}{\equiv} 22+8 \underset{11}{\equiv} 8$

Ganze Vielfache von n weglassen!

evt. schrittweise

Now: Mental Arithmetic with the Rests by Dividing by n: That is modulo n Calculation.

$17 \underset{5}{\equiv} 2$ 17 modulo 5 equals 2 / 17 equals 2 modulo 5 / 17 is congruent 2 modulo 5 $\mathrm{mod}(17\,,5)=2$ $17 \equiv 2 \bmod 5$

5 is the „divisor“ or „modulo-number“

$54 \underset{10}{\equiv}$ $54 \underset{7}{\equiv}$ $113 \underset{11}{\equiv}$

$73 \underset{11}{\equiv} 66+7 \underset{11}{\equiv} 7$

$777730 \underset{11}{\equiv} 777700+30 \underset{11}{\equiv} 30 \underset{11}{\equiv} 22+8 \underset{11}{\equiv} 8$

leave whole multiples of n!

perhaps more steps

modulo-rechnen ist einfach

Man rechnet wie immer, lässt aber an beliebigen Stellen in Zahlen Vielfache der modulo-Zahl n weg oder addiert sie.

$$73 + 56 \underset{6}{\equiv} 129 \underset{6}{\equiv} 3$$
$$1 + 2 = 3$$
$$13 \cdot 37 \underset{5}{\equiv}$$
$$5713 \cdot 68217 \underset{5}{\equiv}$$
$$17 - 24 \underset{5}{\equiv} 2 - 4 \underset{5}{\equiv} -2 \underset{5}{\equiv} 3$$

49

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

modulo Calculating ist Easy

You calculate in the normal manner but in numbers you can leave multiples of the modulo-number n everywhere. You can add the modulo number n, if a result is negative.

$$73 + 56 \underset{6}{\equiv} 129 \underset{6}{\equiv} 3$$
$$1 + 2 = 3$$
$$13 \cdot 37 \underset{5}{\equiv}$$
$$5713 \cdot 68217 \underset{5}{\equiv}$$
$$17 - 24 \underset{5}{\equiv} 2 - 4 \underset{5}{\equiv} -2 \underset{5}{\equiv} 3$$

50

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

modulo-Rechnen ist einfach

Man rechnet modulo n wie immer, lässt aber an beliebigen Stellen in den Zahlen Vielfache der Modulzahl n weg.

$$73 + 56 \underset{6}{\equiv} 129 \underset{6}{\equiv} 3$$
$$1 + 2 = 3$$
$$13 \cdot 37 \underset{5}{\equiv} 3 \cdot 2 \underset{5}{\equiv} 6 \underset{6}{\equiv} 1$$
$$5713 \cdot 68217 \underset{5}{\equiv} 3 \cdot 2 \underset{5}{\equiv} 6 \underset{5}{\equiv} 1$$
$$17 - 24 \underset{5}{\equiv} 2 - 4 = -2 \underset{5}{\equiv} 3$$ weil: -2+5=3

51

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

modulo Calculating ist Easy

You calculate in the normal manner but in numbers you can leave multiples of the modulo-number n everywhere. You can add the modulo number n, if a result is negative.

$$73 + 56 \underset{6}{\equiv} 129 \underset{6}{\equiv} 3$$
$$1 + 2 = 3$$
$$13 \cdot 37 \underset{5}{\equiv} 3 \cdot 2 \underset{5}{\equiv} 6 \equiv 1$$
$$5713 \cdot 68217 \underset{5}{\equiv} 3 \cdot 2 \underset{5}{\equiv} 6 \underset{5}{\equiv} 1$$
$$17 - 24 \underset{5}{\equiv} 2 - 4 \underset{5}{\equiv} -2 \underset{5}{\equiv} 3$$ because -2+5=3

52

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

$\mathbb{Z}_m$ = Z(m) ist die Menge der möglichen Reste beim Teilen durch m

Rechnen Modulo 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Excel Rest(17;5) ⇝ 2

für $17 \underset{5}{\equiv} 2$

Geogebra Mod[17,5] ⇝ 2

Verknüpfungstafeln

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$

53

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

$\mathbb{Z}_m$ = Z(m) is the Set of all Possible Rests in Division by m

Rechnen Modulo 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Excel Rest(17;5) ⇝ 2

für $17 \underset{5}{\equiv} 2$

Geogebra Mod[17,5] ⇝ 2

table of operation

Z*(10)

*	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

Kleinsche Vierergruppe

Z*(8)

*	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Zyklische Gruppe Ordnung 4

Gruppe: keine doppelten Werte
keine Nullen innen bei *
und Assoziativgesetz, nicht einfach zu sehen
Kryptografie: Wir brauchen Gruppen
weil die Inversen den Rückweg erlaube

mehr Gruppen der Ordnung 4 gibt es nicht

54

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Vier Studis helfen einander.
Four Studis help eachother.

4 Min

You calculate in the normal manner but in numbers
you can leave multiples of the modulo-number n everywhere.
You can add the modulo number n, if a result is negative.

Kopfrechnen
mental arithmetic

Muster
sample

$187 \cdot 203 \underset{20}{\equiv} 7 \cdot 3 \underset{20}{\equiv} 1$

$352 - 710 \underset{7}{\equiv} 2 - 3 \underset{7}{\equiv} -1 \underset{7}{\equiv} 6$

$993 \cdot 560 \underset{11}{\equiv}$

$17 + 2^2 + 13 + 551 \underset{5}{\equiv}$

$119 - 232 \underset{20}{\equiv}$

$12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \underset{10}{\equiv}$

55

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Vier Studis helfen einander.
Four Studis help each other.

4 Min

You calculate in the normal manner but in numbers
you can leave multiples of the modulo-number n everywhere.
You can add the modulo number n, if a result is negative.

Kopfrechnen
mental arithmetic

Muster
sample

$187 \cdot 203 \underset{20}{\equiv} 7 \cdot 3 \underset{20}{\equiv} 1$

$352 - 710 \underset{7}{\equiv} 2 - 3 \underset{7}{\equiv} -1 \underset{7}{\equiv} 6$

$993 \cdot 560 \underset{11}{\equiv} 3 \cdot 10 \underset{11}{\equiv} 30 \underset{11}{\equiv} 8$

$17 + 2^2 + 13 + 551 \underset{5}{\equiv} 2 + 2 + 3 + 1 \underset{5}{\equiv} 3$

$109 - 232 \underset{20}{\equiv} 9 - 12 \underset{20}{\equiv} -3 \underset{20}{\equiv} 17$

$12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \underset{10}{\equiv} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \underset{10}{\equiv} 16 \underset{10}{\equiv} 6$

56

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Gleichungen? Equations?

$2 + x \underset{11}{\equiv} 0$ $x = 9$ weil $2 + 9 = 11 \underset{11}{\equiv} 0$ $x = -2 \underset{11}{\equiv} 9$

$2 \cdot x \underset{11}{\equiv} 7$ $x = 9$ weil $2 \cdot 9 = 18 \underset{11}{\equiv} 7$

only by trial and error

$8 + x \underset{10}{\equiv} 2$ $x = 4$

$8 \cdot x \underset{10}{\equiv} 3$ keine Lösung / no solution — Weil k*10+3 ungerade aber 8*x gerade

$\mathbb{Z}_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ hat außer 0 weitere

$8 \cdot x \underset{10}{\equiv} 0$ $x = 5$ weil $8 \cdot 5 = 40 \underset{10}{\equiv} 0$

Nullteiler!!!!
zero divisor

$8 \cdot x \underset{5}{\equiv} 0$ keine Lösung / no solution

$\mathbb{Z}_5^* = \{1,2,3,4\}$ has no zero divisors because 5 is prime.

58

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Was muss ich mir merken?

- Die **Ganzen Zahlen** sind $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$
- In der Kryptografie geht es um das **Rechnen modulo n** in der Menge $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, der Menge der Reste.
- In der Kryptografie hat **n etwa 200 Stellen**. Zum Lernen nehmen wir kleine n und rechnen meist im Kopf.
- Hinter jeder Zahl r in $\mathbb{Z}_n$ muss man sich alle Zahlen vorstellen, die **denselben Rest beim Teilen durch n** ergeben. Sie ergeben sich aus r durch Addition eines beliebigen Vielfachen von n. Also r repräsentiert $z \cdot n + r$ mit $z \in \mathbb{Z}$
  Das schreibt man so: $r \underset{n}{\equiv} z \cdot n + r$
- Im Beispiel $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 6\}$

$3 \underset{7}{\equiv} z \cdot 7 + 3$ $3 \underset{7}{\equiv} 1 \cdot 7 + 3 = 10$ $3 \underset{7}{\equiv} 200 \cdot 7 + 3 = 143$ $3 \underset{7}{\equiv} -1 \cdot 7 + 3 = -4$

59

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

What Shall I Have to Keep in My Mind?

- The **integers** are this: $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$
- In cryptography one **calculate modulo n** in the set $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, the set of residues, the set of rests.
- In cryptografie **n has ca. 200 digits**. to learn it, we take small modulo-numbers n and mostly we calculate by head.
- behind every number r in $\mathbb{Z}_n$ one must imagine alle numbers with the **same rest in division by n**.
  They are constructed from r by addition of an arbitrary multiple of n. So r represents $z \cdot n + r$ mit $z \in \mathbb{Z}$
  We write in this manner: $r \underset{n}{\equiv} z \cdot n + r$
- In example $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 6\}$

$3 \underset{7}{\equiv} z \cdot 7 + 3$ $3 \underset{7}{\equiv} 1 \cdot 7 + 3 = 10$ $3 \underset{7}{\equiv} 200 \cdot 7 + 3 = 143$ $3 \underset{7}{\equiv} -1 \cdot 7 + 3 = -4$

60

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Uff, jetzt haben wir schon viel gelernt!

Ziel: Kryptografie verstehen

Weitere Überraschungen beim modulo-Rechen folgen!

61

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Wow, We Have Learned Much in this Short Time!

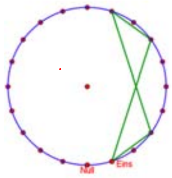
goal: to understand cryptography

Futher surprises with modulo-calculating!

62

Potenzen sind spannend

Die Potenzen von 3 modulo 20



3 hat in Z (20) die **Ordnung 4,**

denn $3^4 \underset{20}{\equiv} 1$ 4minimal

Potenzen von 3 in Z = {1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049,

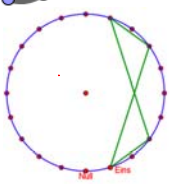
Potenzen von 3 in Z(20)= {1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1}

Nur Zahlen, deren Potenzen in Z(n) wieder 1 erzeugen sind brauchbar. Der kleinste Exponent k von a, mit $a^k \underset{n}{\equiv} 1$ heißt $\boxed{\textbf{Ordnung von a}}$ modulo n.

63

Powers are exciting

The powers of 3 modulo 20



3 has in Z (20) the **Order 4,**

denn $3^4 \underset{20}{\equiv} 1$ 4minimal

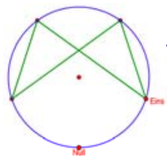
Potenzen von 3 in Z = {1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049

Potenzen von 3 in Z(20)= {1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1}

Numbers are only useful, if the powers in Z(n) equal 1 for any exponent. The smalest exponent k von a, mit $a^k \underset{n}{\equiv} 1$ is named $\boxed{\textbf{Order of a}}$ modulo n.

64

Powers modulo n



$2^3 \underset{5}{\equiv} 8 \underset{5}{\equiv} 3$

$2^4 = 2^3 \cdot 2 \underset{5}{\equiv} 3 \cdot 2 \underset{5}{\equiv} 1$ $ord(2) = 4$ in Z_5

Potenzen von 2 in Z = {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,

Potenzen von 2 in Z(5)= {1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1}

$(Z_5, \cdot)$ $2^{50} \underset{5}{\equiv} \underbrace{2^{48}}_{1} \cdot 2^2 = 4$ weil 4|48

$2^{7741} \underset{5}{\equiv} 2$ weil 4|7740

65

Powers in Z(n)

The powers of 3 modulo 20

$3^4 \underset{20}{\equiv} 1$ $Z(20)$

Potenzen von 3 in Z = {1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049,

Potenzen von 3 in Z(20)= {1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1}

first 1 with $3^k \underset{20}{\equiv} 1$ $k>0$

$3^{5000} \underset{20}{\equiv} 3^0 = 1$

k ist the order of 3 modulo 10

denn 4 teilt 5000

66

$3^{5000} \underset{20}{\equiv} 1$

That's cryptography !

68