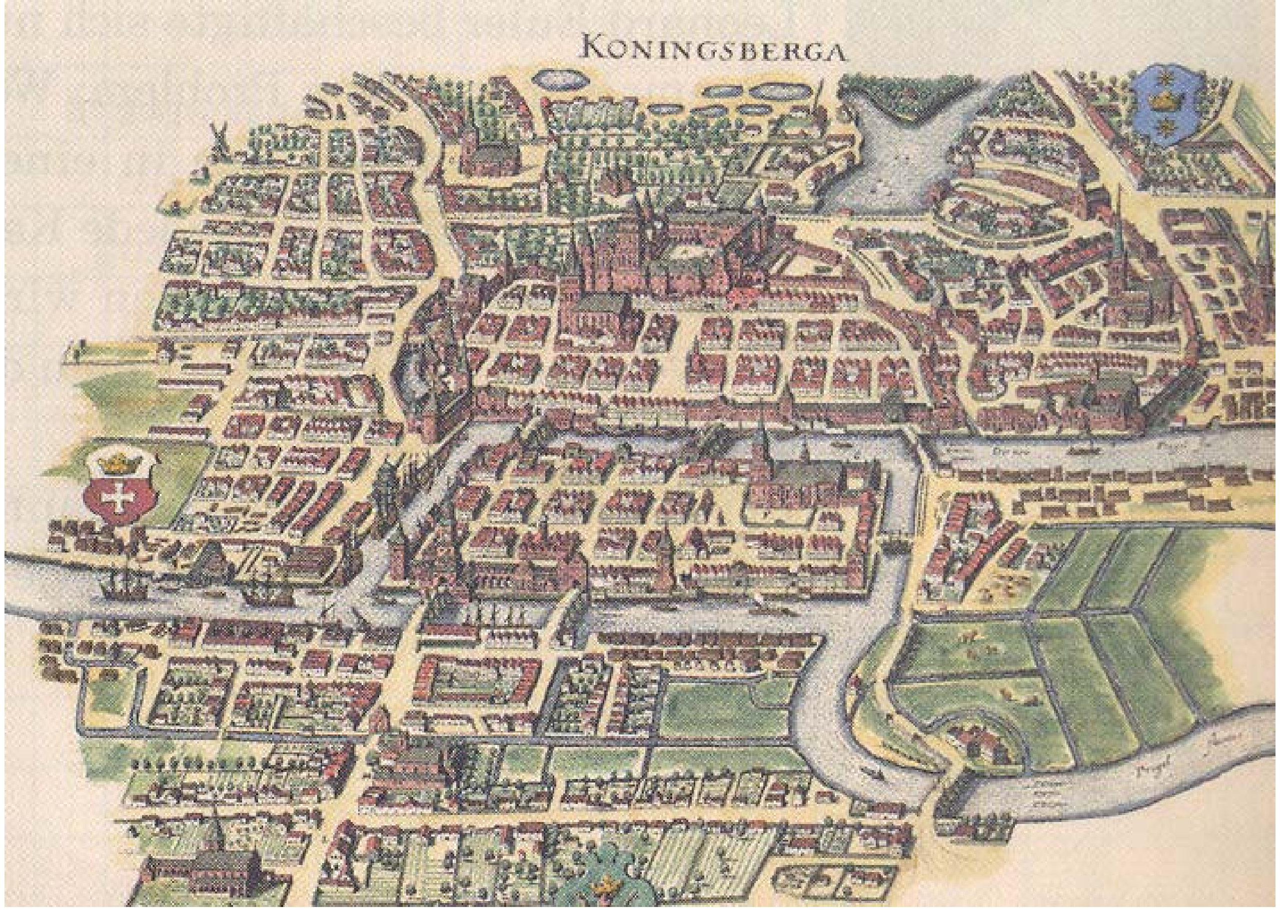
Graphentheorie



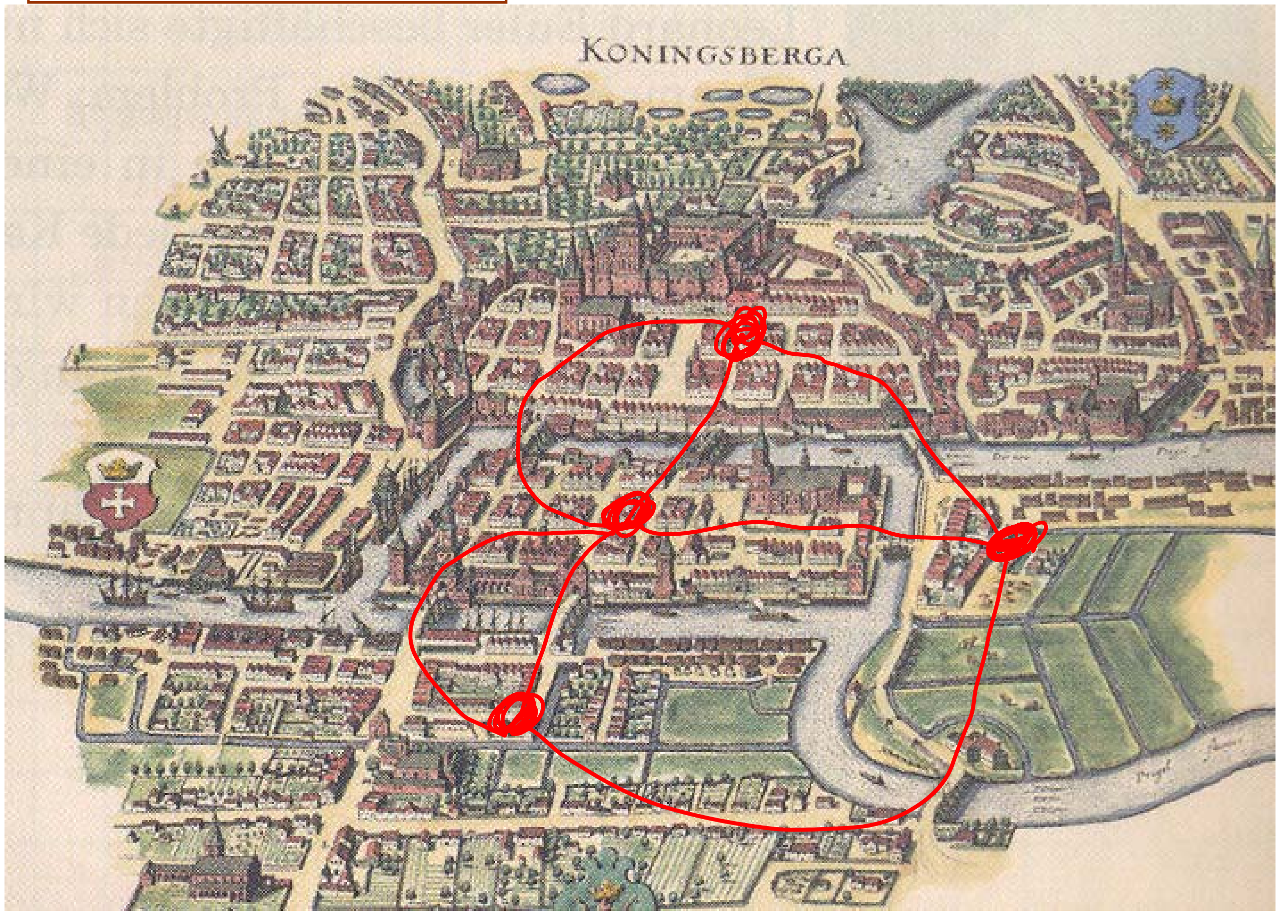
Gibt es in Königsberg einen Spaziergang, bei dem man jede der sieben Pregelbrücken genau einmal überquert?

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Königsberger Brückenproblem

Im Jahre 1736

Leonhard Euler löste das Problem allgemein



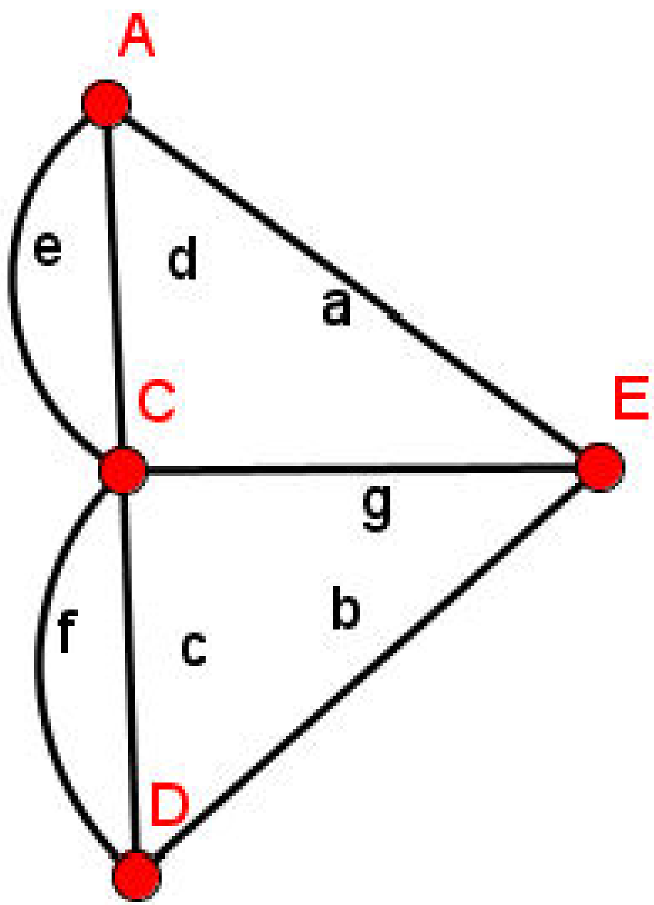
Gibt es in Königsberg einen Spaziergang, bei dem man jede der sieben Pregelbrücken genau einmal überquert?

Was ist ein Graph?

Im Jahre 1736

Leonhard Euler löste das Problem allgemein und begründete damit die Graphentheorie

Jede Kante verläuft von Ecke zu Ecke.



Ein Graph besteht aus einer **E**ckenmenge und einer **K**antenmenge

$$G = (E, K)$$

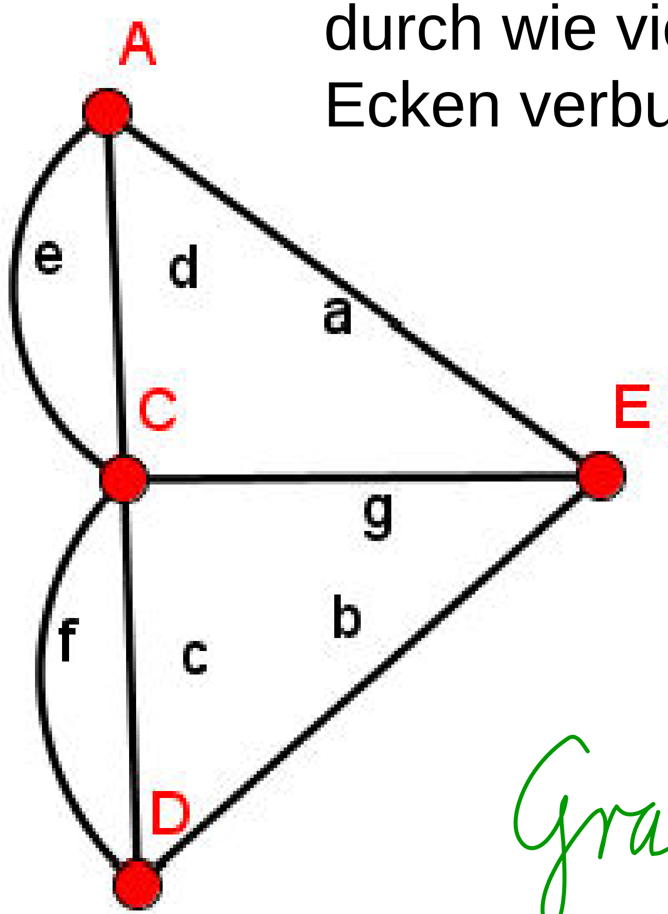
Mindestens eine Ecke

Ecken=
vertices V
Kanten=
edges E

Gundbegriffe

Die **Adjazenz-Matrix** gibt an, durch wie viele Kanten die Ecken verbunden sind.

Der **Grad einer Ecke** ist die Anzahl der abgehenden Kanten.



	A	C	E	D
A	0	2	1	0
C	2	0	1	2
E	1	1	0	1
D	0	2	1	0

↓+

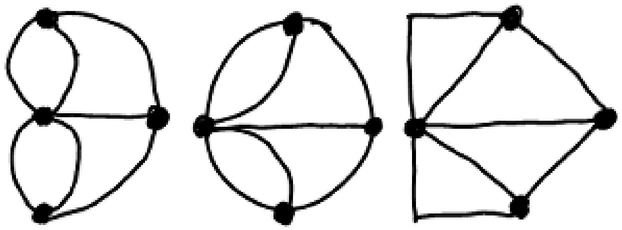
Grad

Eulersche Begriffe

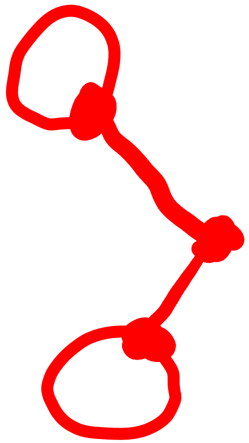
Im Jahre 1736

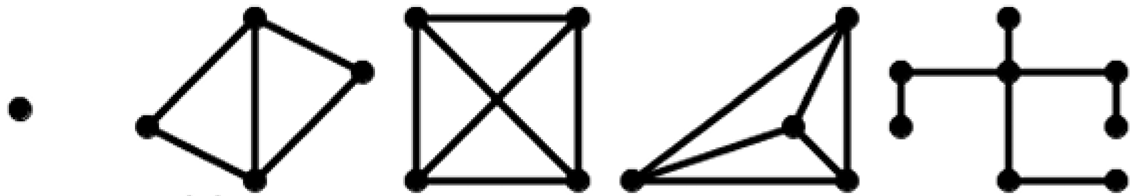
Leonhard Euler löste das Problem allgemein

In einem **Eulerschen Weg** kommt jede Kante genau einmal vor.



Kanten, die zu ihrer Startecke zurückkehren, heißen Schlingen.





a) b) c) d) e)

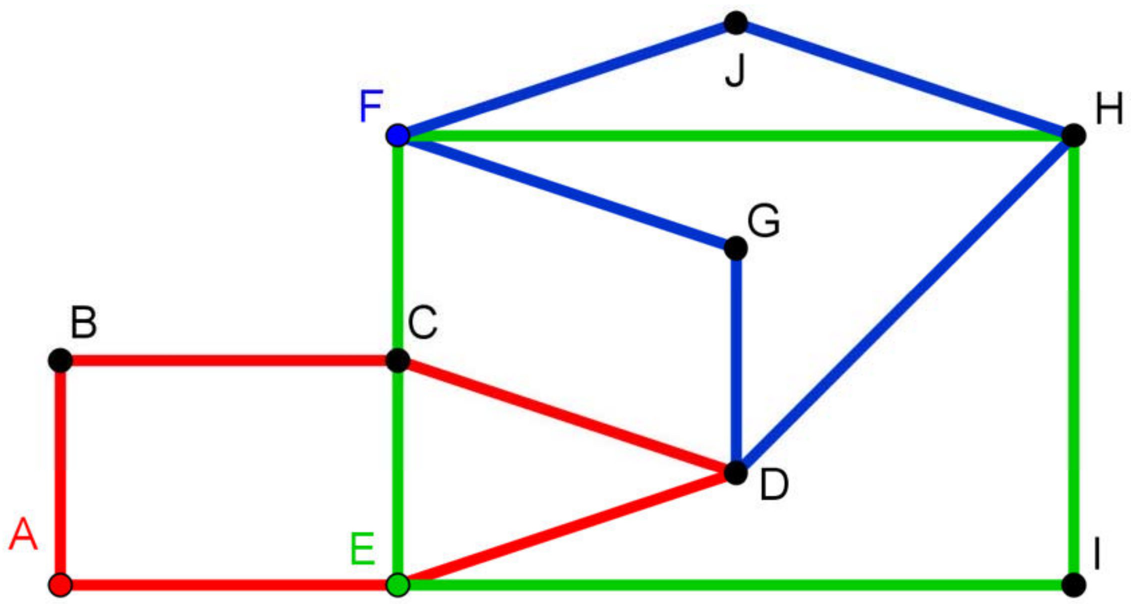
Ein geschlossener Eulerscher Weg heißt **Eulerscher Kreis**.

Eulersche Begriffe

Im Jahre 1736

Leonhard Euler löste das Problem allgemein

In einem **Eulerschen Weg** kommt jede Kante genau einmal vor.



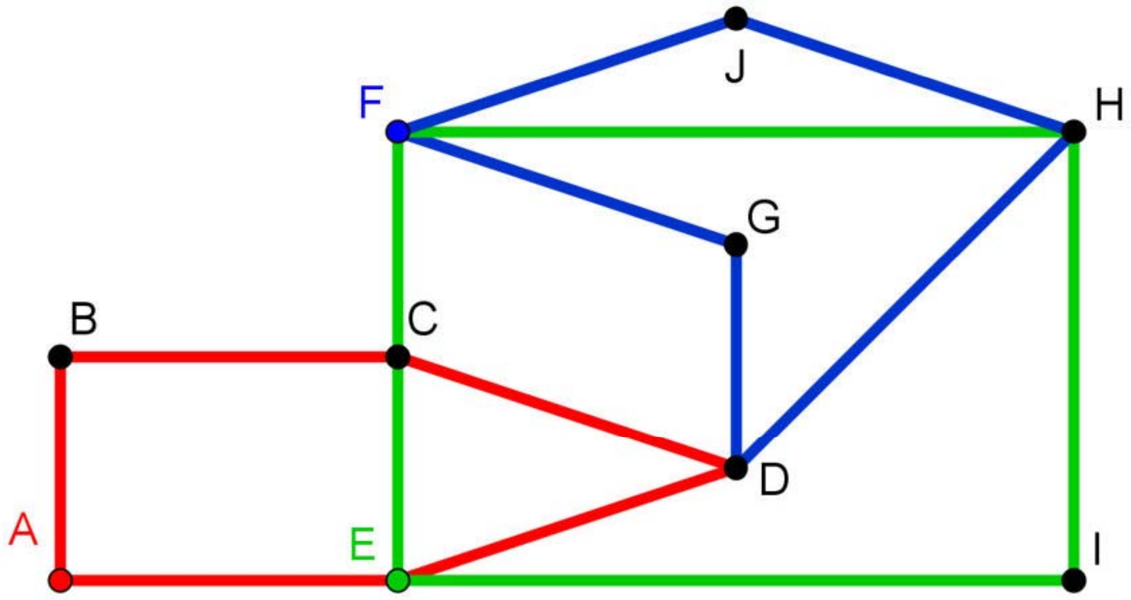
Ein geschlossener Eulerscher Weg heißt **Eulerscher Kreis**.

In welchen Graphen gibt es einen Eulerschen Kreis?

Eulers Lösung:

Im Jahre 1736

Leonhard Euler löste das Problem allgemein



Eulerscher Satz:

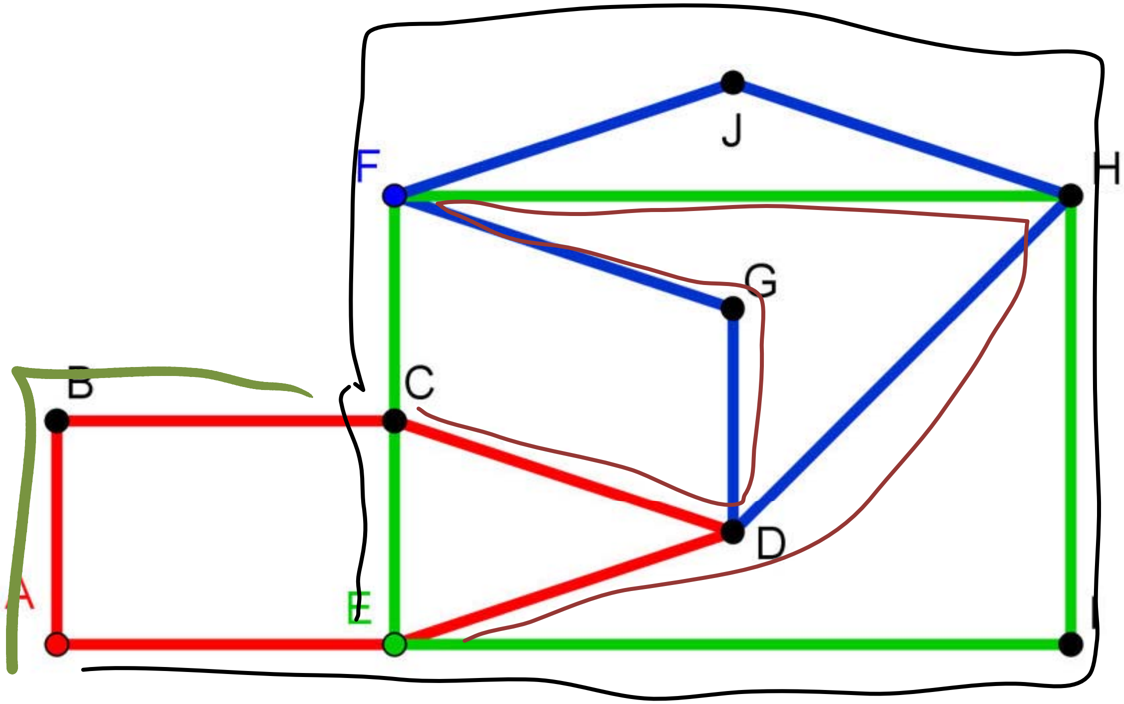
Einen Eulerschen Kreis gibt es genau dann, wenn alle Ecken einen geraden Grad haben.

Beweis: ???

Eulers Lösung:

Im Jahre 1736

Leonhard Euler löste das Problem allgemein



Eulerscher Satz:

Einen Eulerschen Kreis gibt es genau dann, wenn alle Ecken einen geraden Grad haben.

Wahl bei: E H F C D

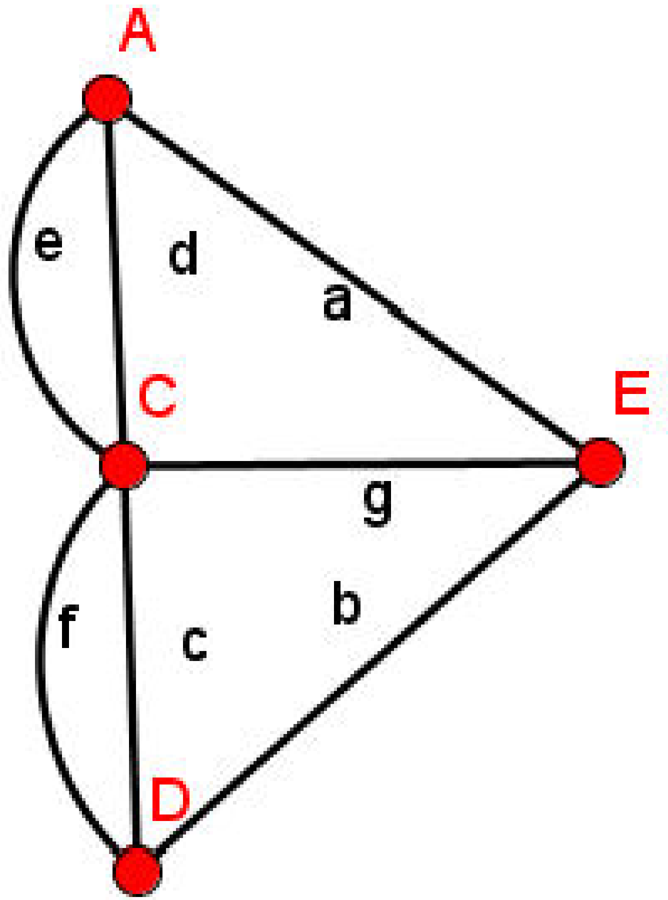
keine Wahl mehr E H F C D

Eulers Lösung:

Im Jahre 1736

Leonhard Euler löste das Problem allgemein

Im Königs-berg-Graphen gibt es keinen Eulerschen Kreis.



Eulerscher Satz:

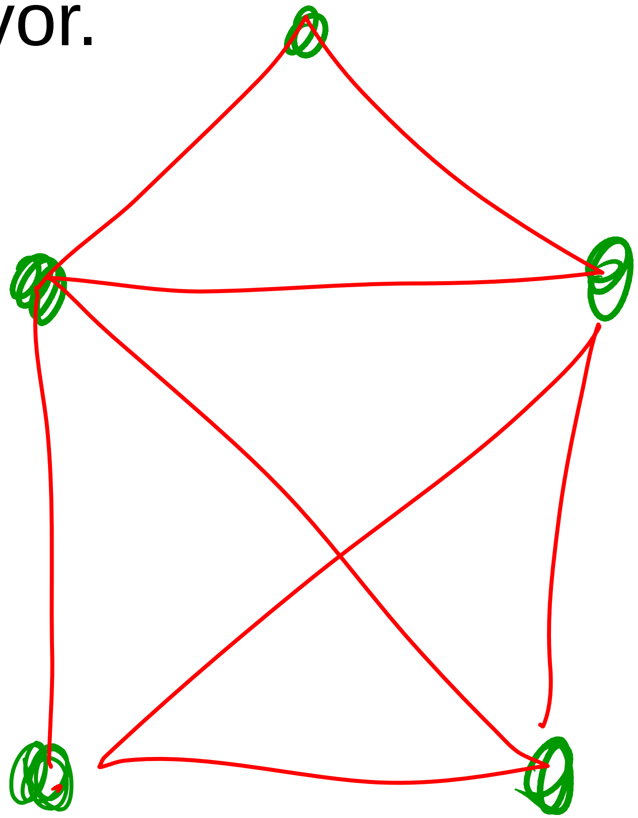
Einen Eulerschen Kreis gibt es genau dann, wenn alle Ecken einen geraden Grad haben.

Das Haus des Nikolaus

In einem **Eulerschen Weg** kommt jede Kante genau einmal vor.

Das Haus des Nikolaus

In einem **Eulerschen Weg** kommt jede Kante genau einmal vor.



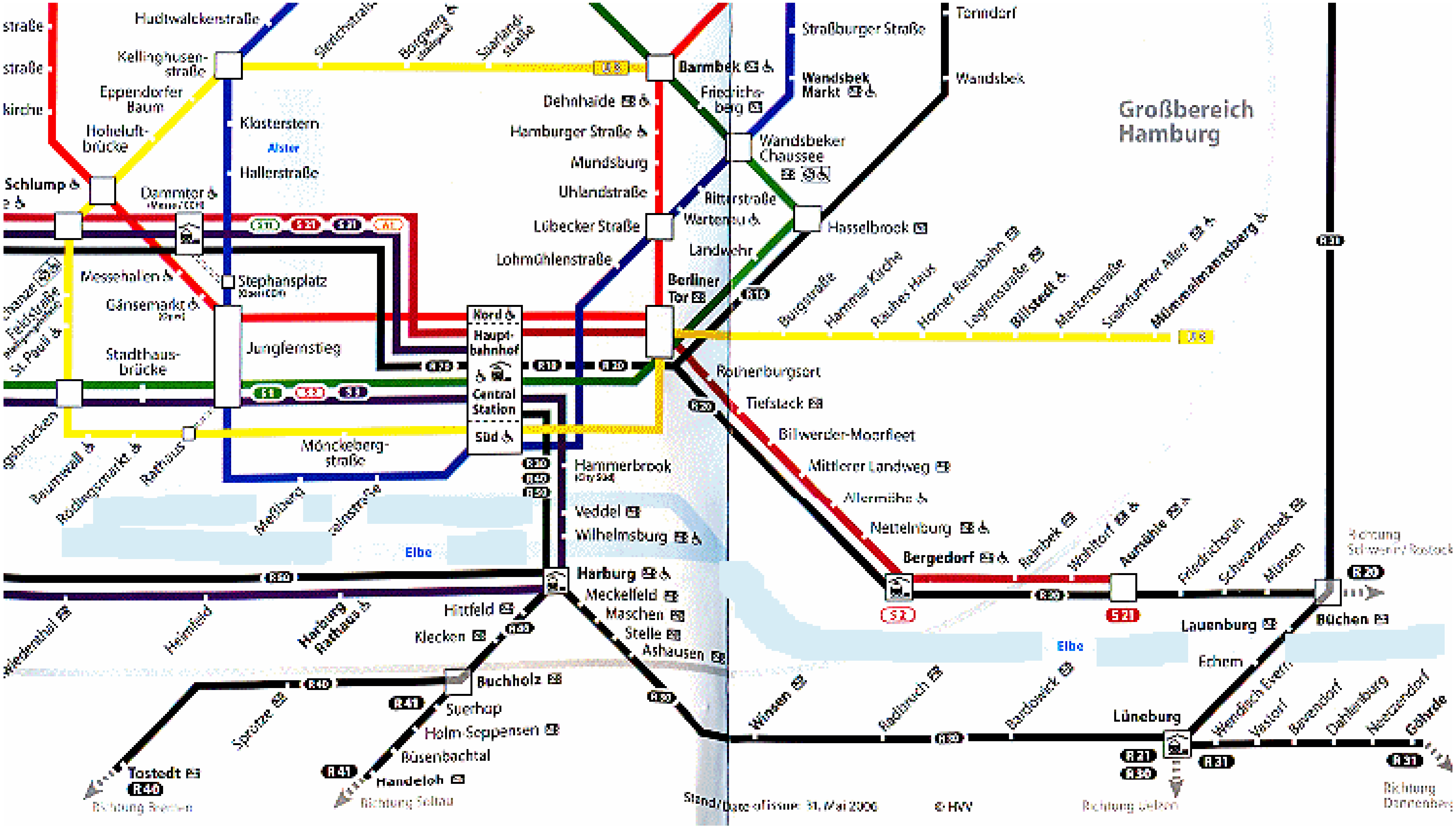
Grad:

Eulerscher Satz:

Einen offenen Eulerschen Weg gibt es genau dann, wenn genau zwei Ecken einen ungeraden Grad haben.

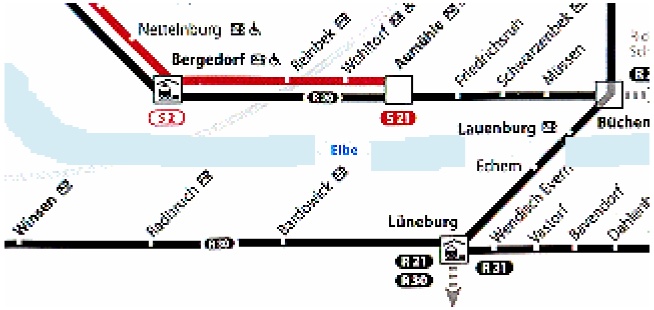
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Graphen in unserer Welt



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Graphen in unserer Welt



Mit Graphen schafft man sich ein

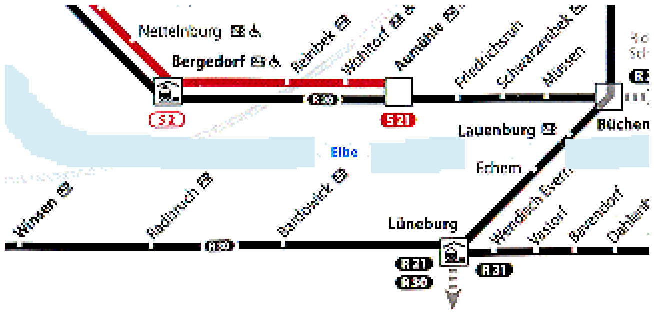
Modell der Wirklichkeit,

das einen bestimmten Zusammenhang deutlich macht und andere Aspekte der Wirklichkeit ausblendet.

Die geometrische Lage und Form spielt bei Graphen eigentlich gar keine Rolle.

Bei Streckenplänen wird allerdings ganz grob die gegenseitige Lage wiedergegeben.

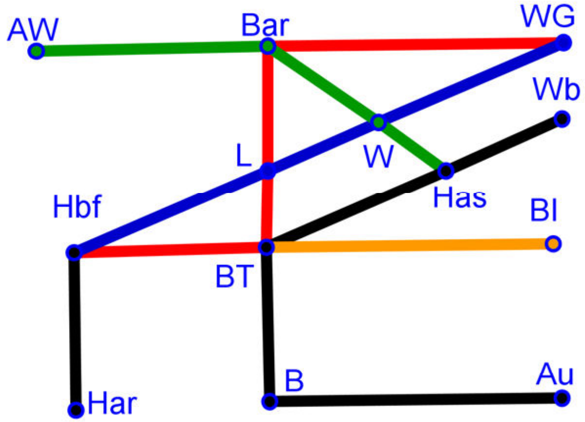
Graphen in unserer Welt



Mit Graphen schafft man sich ein

Modell der Wirklichkeit,

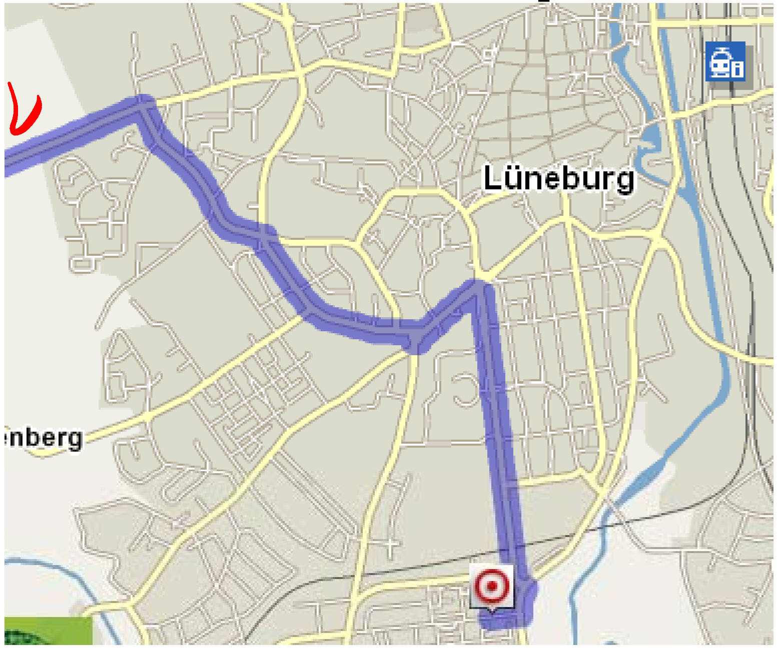
das einen bestimmten Zusammenhang deutlich macht und andere Aspekte der Wirklichkeit ausblendet.



Die geometrische Lage und Form spielt bei Graphen eigentlich gar keine Rolle.

Bei Streckenplänen wird allerdings ganz grob die gegenseitige Lage wiedergegeben.

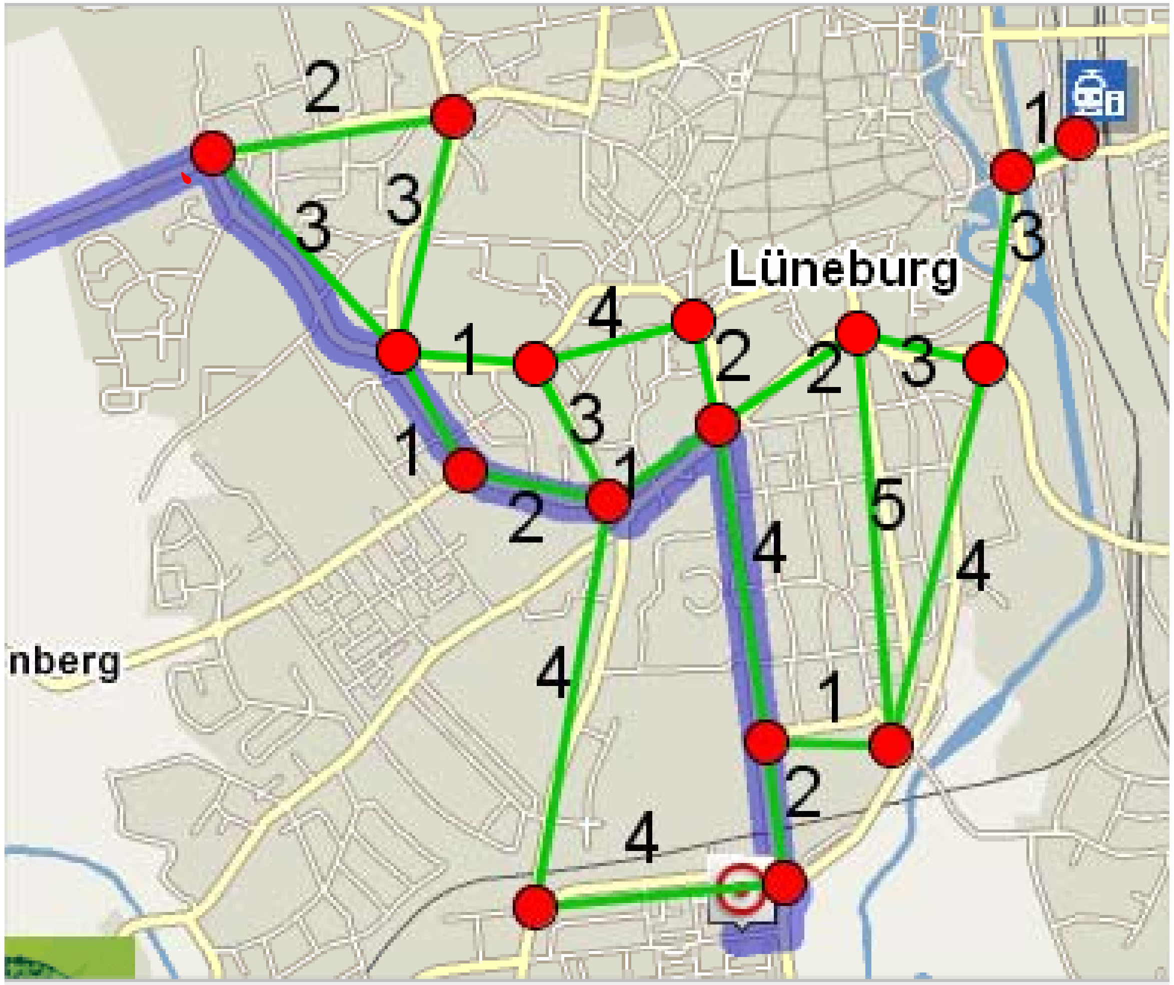
Routenplaner und Graphen



Die Routenplaner arbeiten mit

bewerteten Graphen

Routenplaner und Graphen

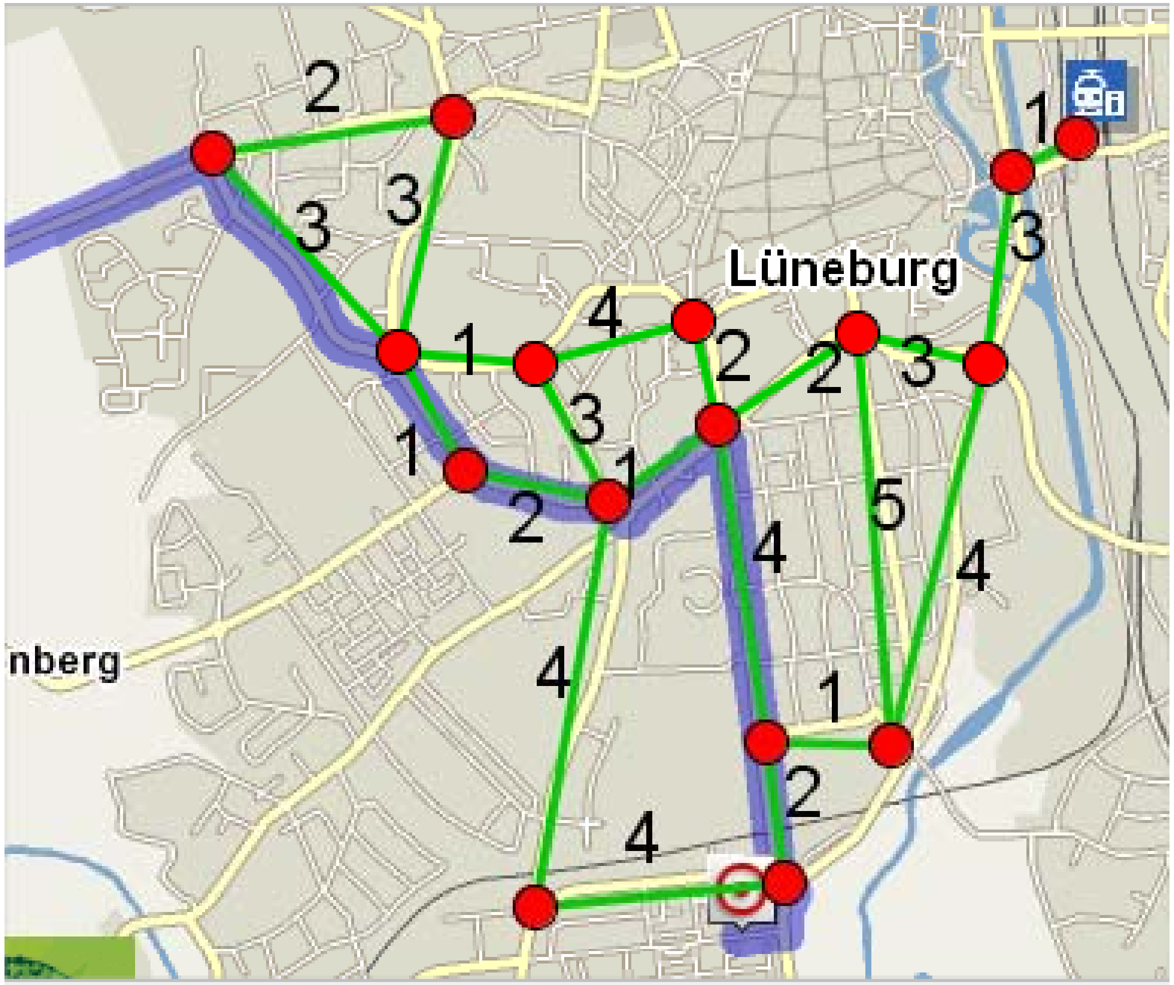


Die Routenplaner arbeiten mit bewerteten Graphen

Die Bewertung kann Entfernung, Zeit, Kosten .... bedeuten.

Erstmal leichtere Probleme:

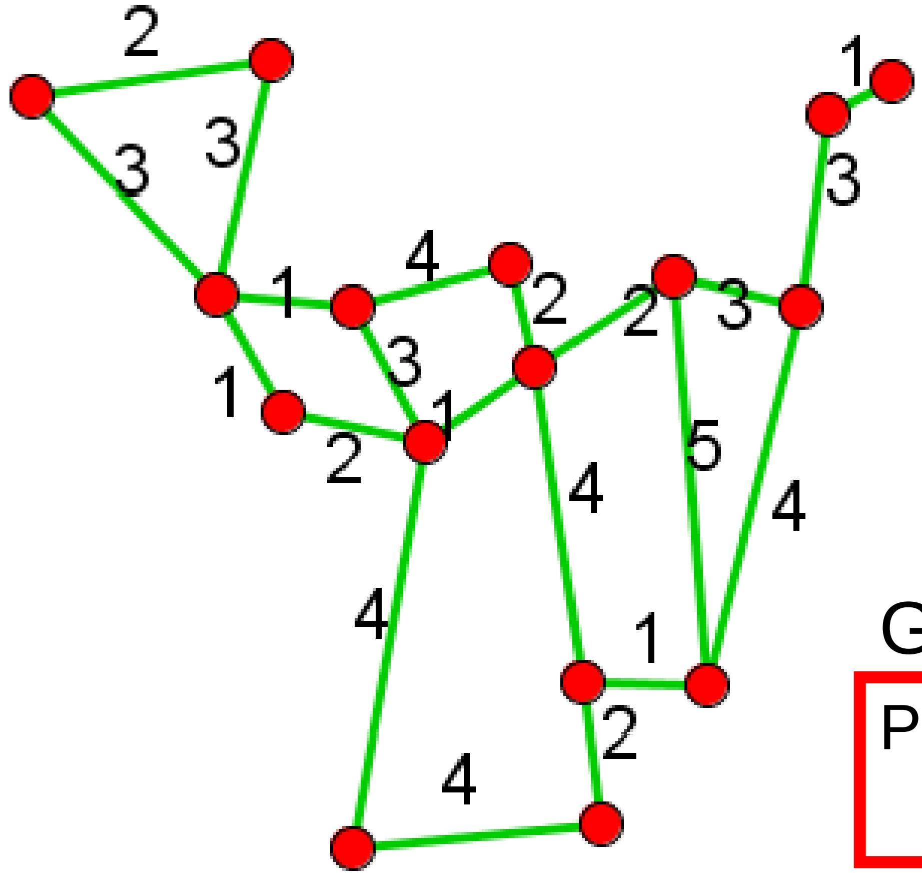
Stadtplanung und Graphen



Für das Stadt-
bauamt kann

die Bewertung
Baukosten
bedeuten.

Optimierung und Graphen



Bewertung

Baukosten

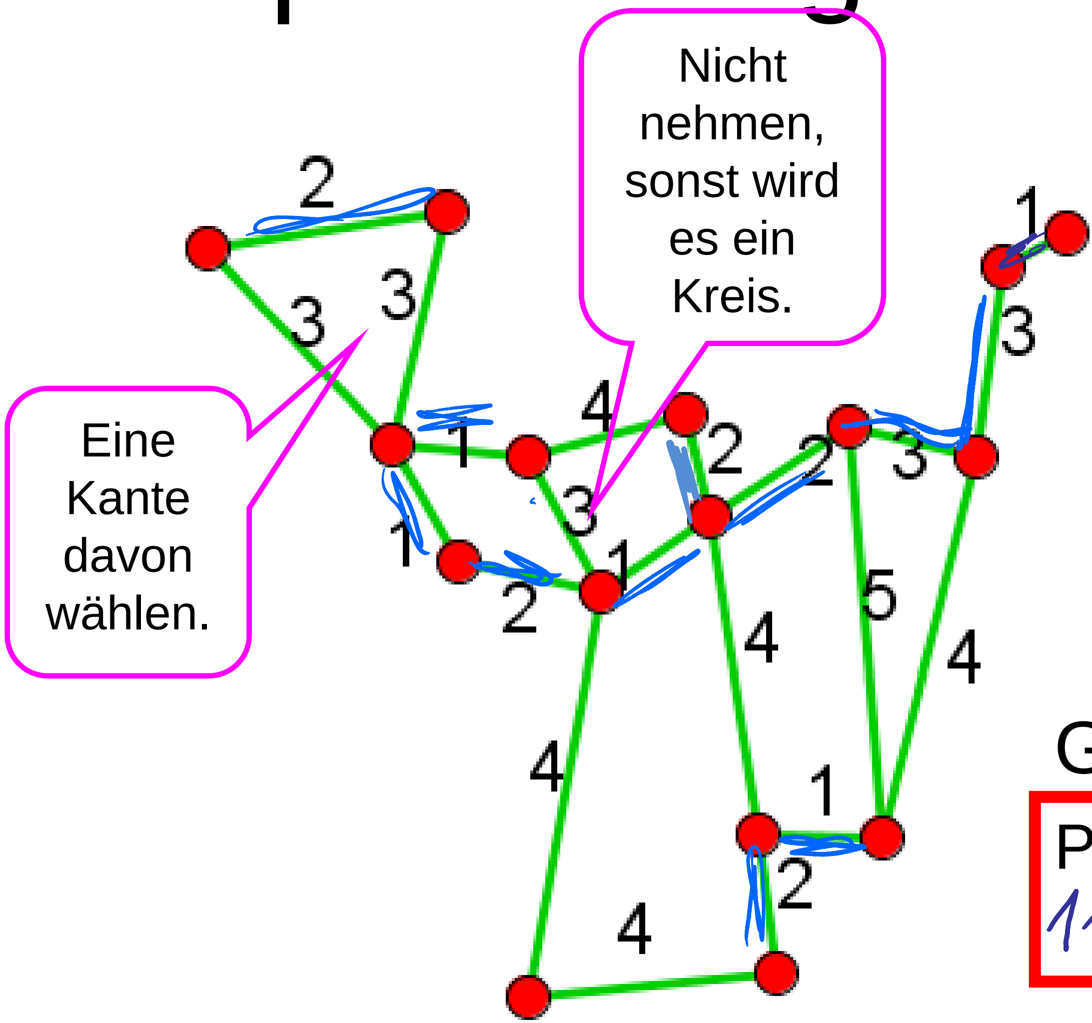
Radwegbelag möglichst billig so erneuern, dass jede Kreuzung auf neuem Belag erreichbar ist.

Greedy-Algorithmus

Protokoll

greedy=gierig

Optimierung und Graphen



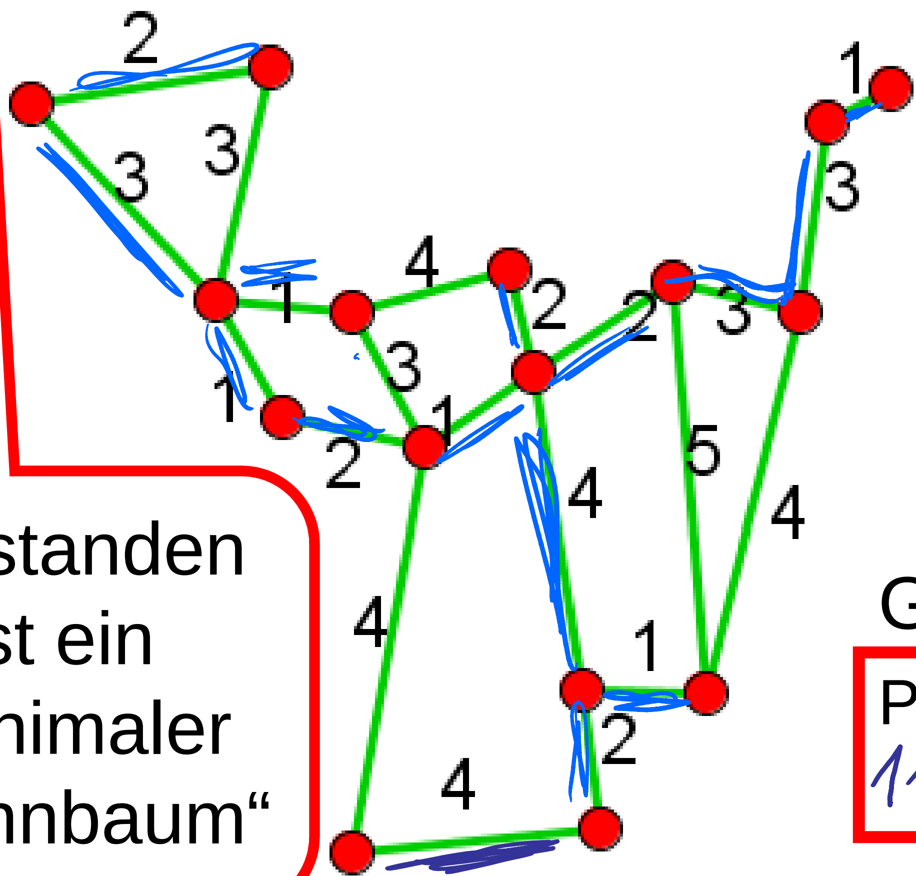
Bewertung
Baukosten

Radwegbelag möglichst billig so erneuern, dass jede Kreuzung auf neuem Belag erreichbar ist.

Greedy-Algorithmus

Protokoll
1 1 1 1 1 2 2 2 2

Optimierung und Graphen



Bewertung
Baukosten

Radwegbelag möglichst billig so erneuern, dass jede Kreuzung auf neuem Belag erreichbar ist.

Entstanden ist ein „minimaler Spannbaum“

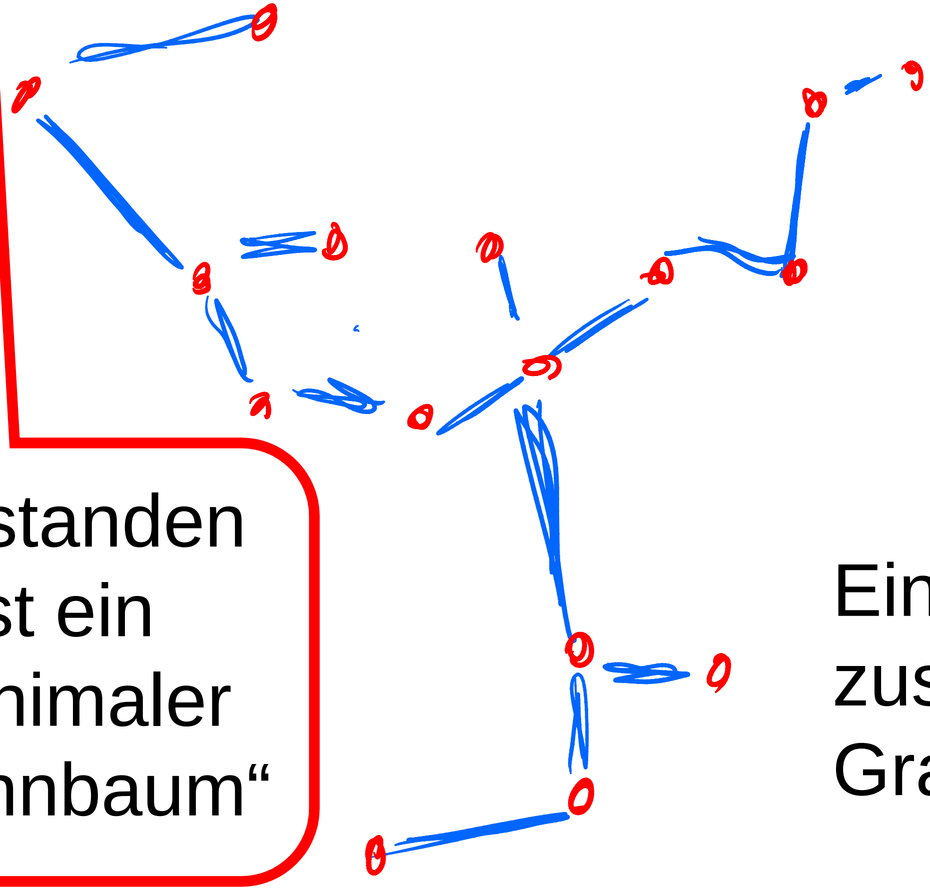
Greedy-Algorithmus

Protokoll
111111222233344

Optimierung und Graphen

Bewertung
Baukosten

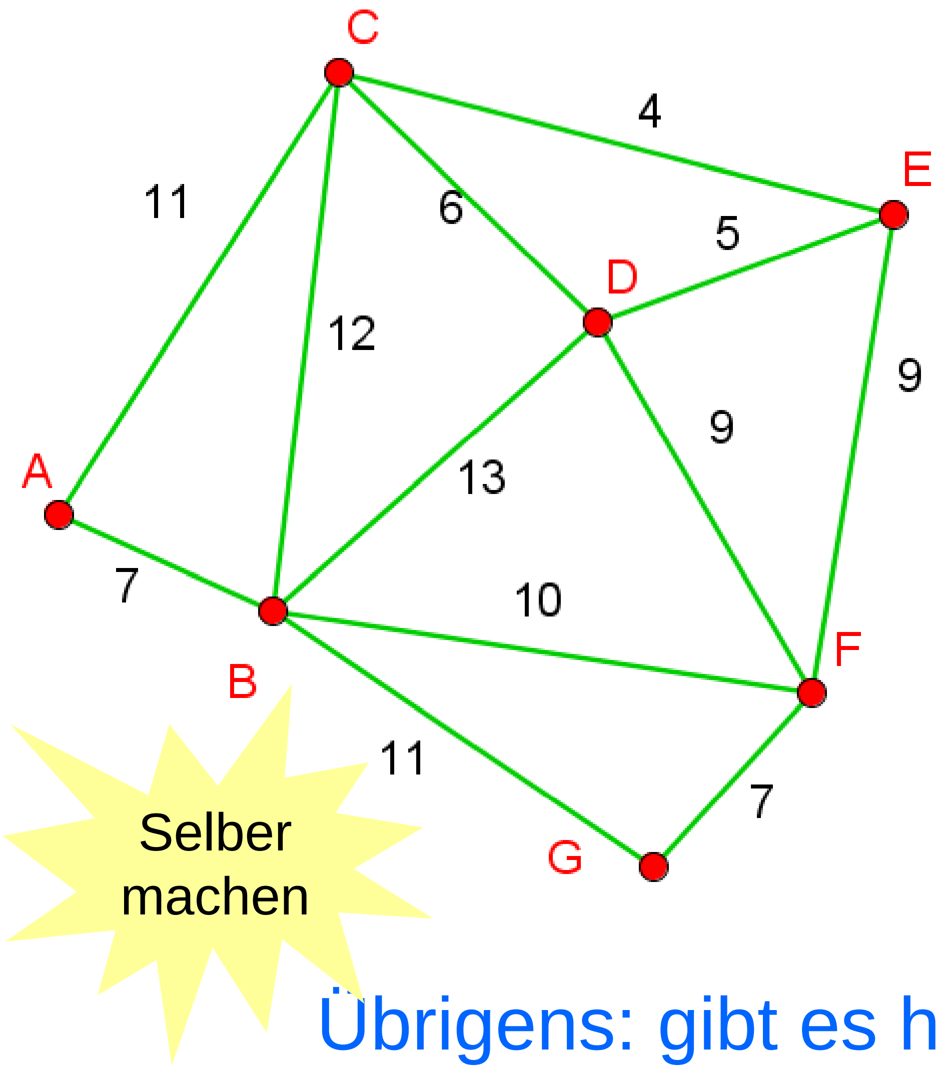
Radwegbelag möglichst billig so erneuern, dass jede Kreuzung auf neuem Belag erreichbar ist.



Entstanden ist ein „minimaler Spannbaum“

Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreise.

Optimierung und Graphen



Bewertung Baukosten

Leitungsnetz verlegen, so dass jeder Knoten erreicht wird. Minimiere die Baukosten.

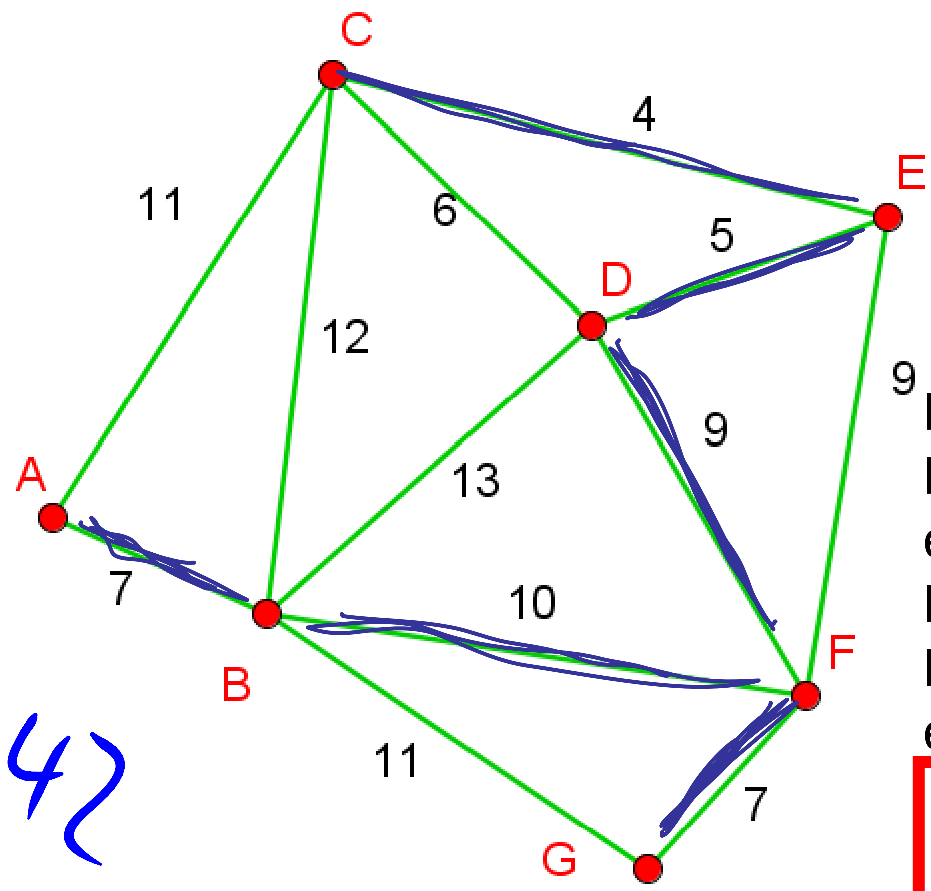
Greedy-Algorithmus

Markiere solange die billigsten Kanten, solange kein Kreis entsteht.
Mache dann mit einer nächst teureren Kante weiter, bis ein Spannbaum entsteht.

Protokoll

Übrigens: gibt es hier einen Eulerschen Weg?

Optimierung und Graphen



Bewertung Baukosten

Leitungsnetz verlegen, so dass jeder Knoten erreicht wird. Minimiere die Baukosten.

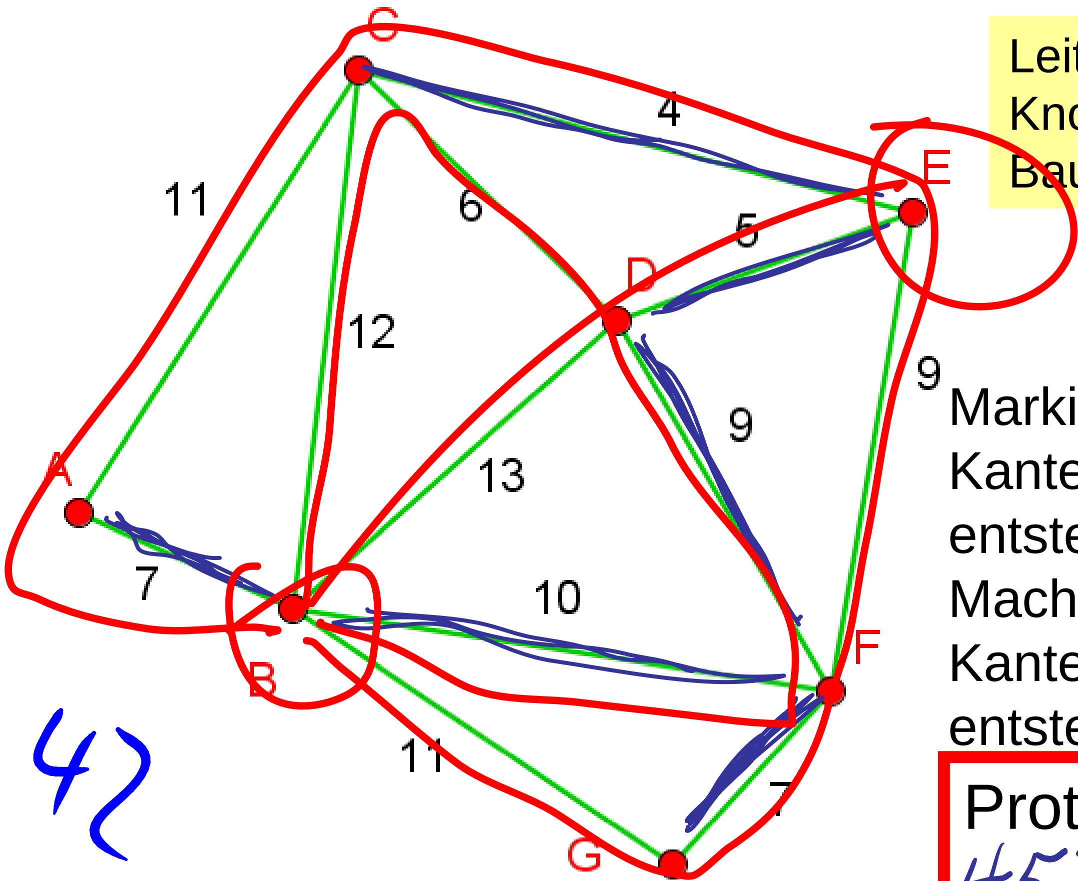
Greedy-Algorithmus

Markiere solange die billigsten Kanten, solange kein Kreis entsteht.
Mache dann mit einer nächst teuren Kante weiter, bis ein Spannbaum entsteht.

Protokoll
4 5 7 7 9 10

Eulerschen Weg? Ja, denn genau zwei Ecken haben ungeraden Grad.

Optimierung und Graphen



Bewertung Baukosten

Leitungsnetz verlegen, so dass jeder Knoten erreicht wird. Minimiere die Baukosten.

Greedy-Algorithmus

Markiere solange die billigsten Kanten, solange kein Kreis entsteht.
Mache dann mit einer nächst teuren Kante weiter, bis ein Spannbaum entsteht.

Protokoll
4 5 7 7 9 10

Eulerschen Weg? Ja, denn genau zwei Ecken haben ungeraden Grad.

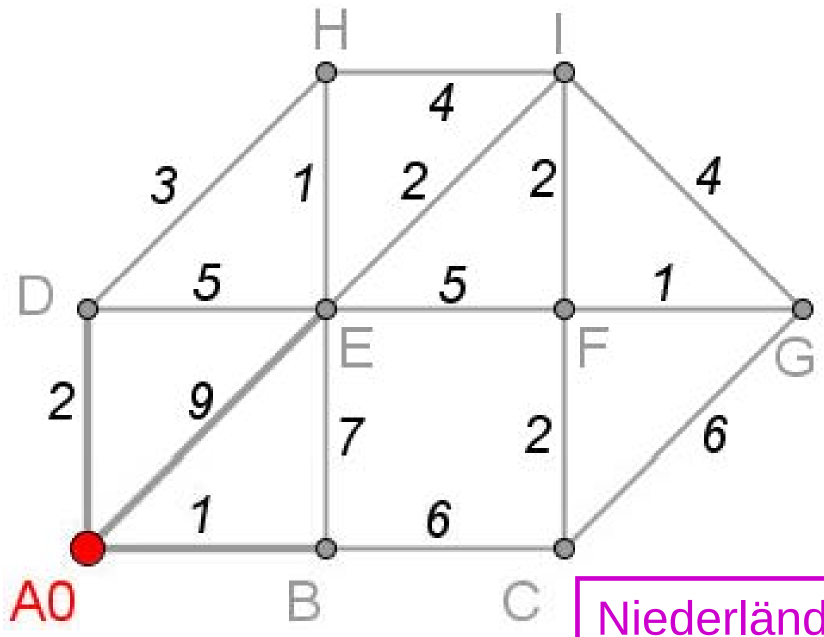
Graphen-Theorie

ist eins der spannendsten und dynamischsten mathematischen Themen zur Zeit.

Zwei Mathematiker greifen die Idee von „Sofies Welt“ auf…….

http://www-m9.ma.tum.de/Ruth/WebHome

Kürzeste-Wege-Bäume



Das ist das Routenplaner-Problem. Es ist schwieriger zu lösen.

Dijkstra-Algorithmus.

Wir suchen die kürzesten Wege von A aus zu allen anderen Ecken

Der „Wert“ einer Ecke ist seine Entfernung von A.

Niederländischer Mathematiker Edsger Dijkstra, 1960

Sprich ij wie ei

An der geforderten Ecke anfangen

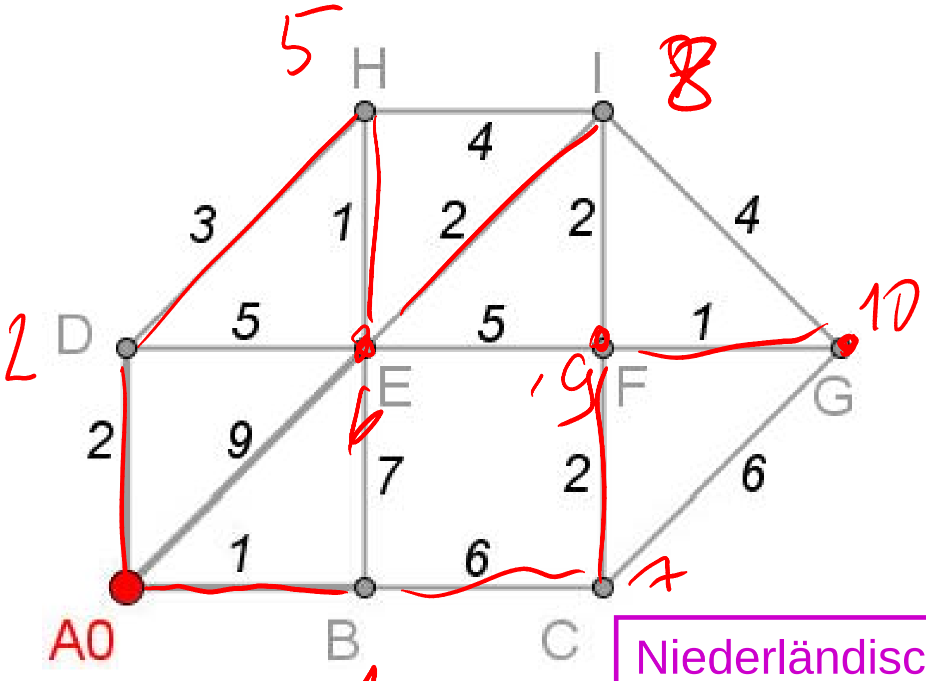
Zu den Nachbarecken auf billigste Art mit „Grips“

weiter so

Erstmal so wie Sie es in der Klausur machen sollten!

Weg anmalen, Ecken mit Ihrem Abstandswert beschriften

Kürzeste-Wege-Bäume



Das ist das Routenplaner-Problem. Es ist schwieriger zu lösen.

Dijkstra-Algorithmus.

Wir suchen die kürzesten Wege von A aus zu allen anderen Ecken

Der „Wert“ einer Ecke ist seine Entfernung von A.

Niederländischer Mathematiker Edsger Dijkstra, 1960

Sprich ij wie ei

An der geforderten Ecke anfangen

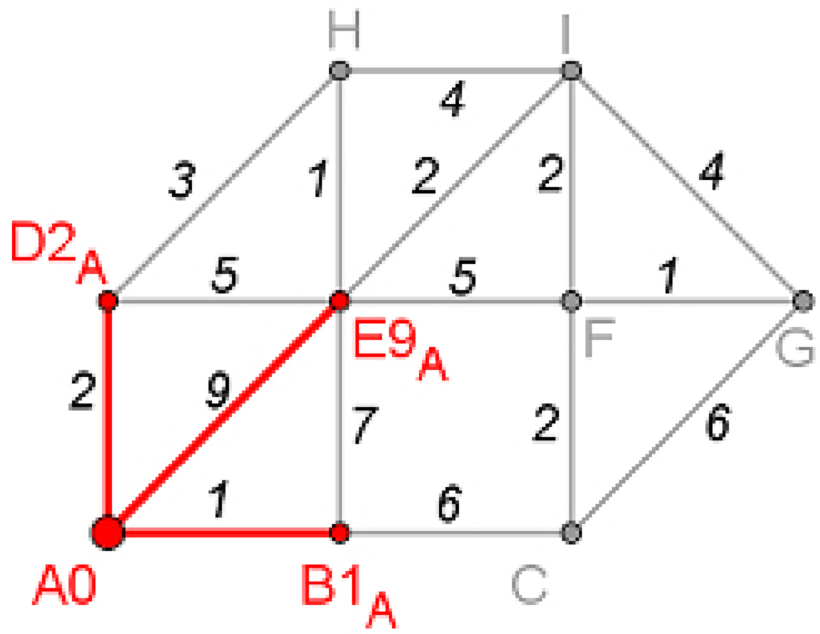
Zu den Nachbarecken auf billigste Art mit „Grips“

weiter so

Lassen Sie sich im Folgenden lediglich auf den Grundgedanken ein.

Weg anmalen, Ecken mit Ihrem Abstandwert beschriften

Kürzeste-Wege-Bäume



Das ist das Routenplaner-Problem.

Dijkstra-Algorithmus.

Wir notieren an jeder Ecke Wert und Vorgänger.

Der „Wert“ einer Ecke ist seine Entfernung von A.

Die Nachbarn der aktiven Ecke kommen zu den unfertigen Ecken.

Fertige Ecken: A

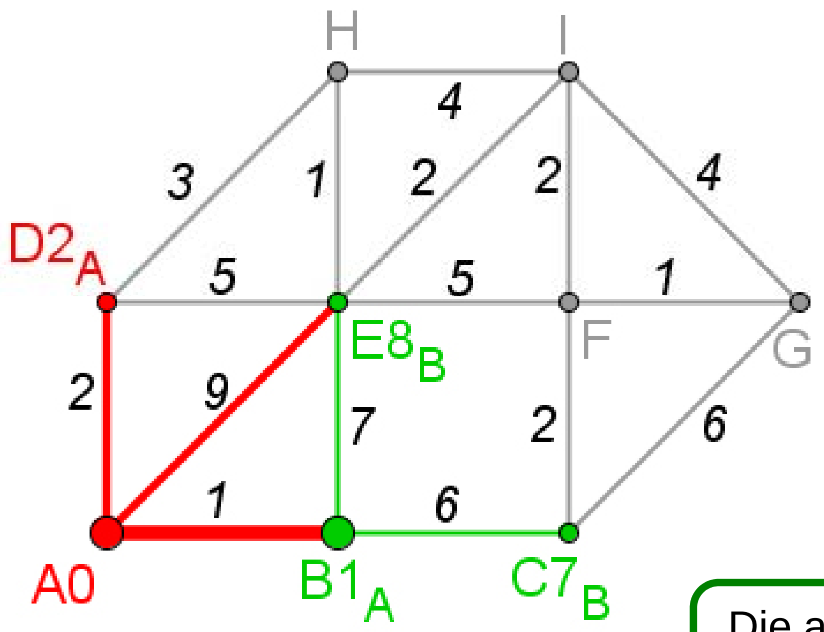
Unfertige Ecken: $B1_A$, $E9_A$, $D2_A$,

Aktive Ecke wird: $B1_A$

Eine Ecke mit minimalem Wert wird neue aktive Ecke.

Unbetretene Ecken: C F G H I

Kürzeste-Wege-Bäume



Das ist das Routenplaner-Problem.

Dijkstra-Algorithmus.

Wir notieren an jeder Ecke Wert und Vorgänger.

Der „Wert“ einer Ecke ist seine Entfernung von A.

Die aktive Ecke ist fertig.

Die Nachbarn der aktiven Ecke kommen zu den unfertigen Ecken.

Dabei werden ggf. Ecken neu bewertet.

Eine Ecke mit minimalem Wert wird neue aktive Ecke.

Fertige Ecken: A, $B1_A$,

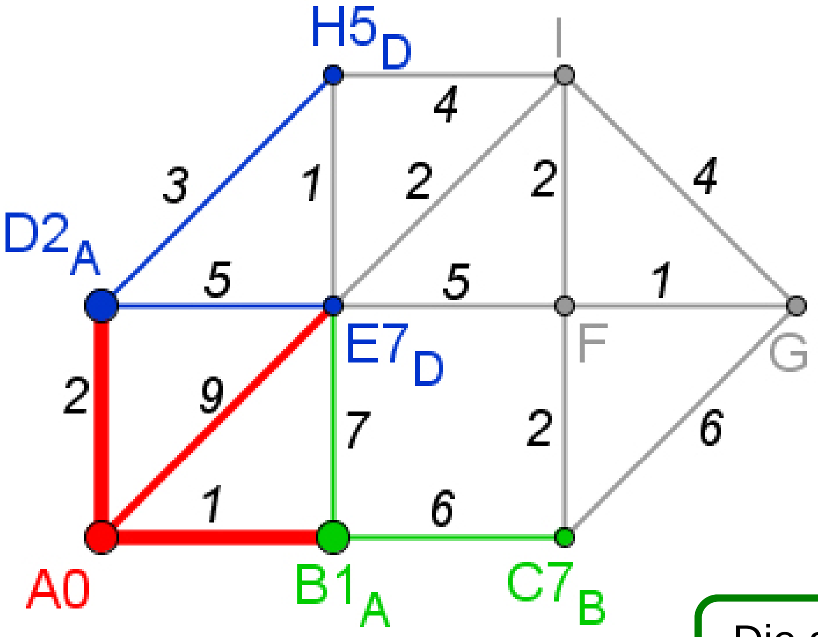
Unfertige Ecken: $E9_A$, $E8_B$, $D2_A$, $C7_B$,

Aktive Ecke wird: $D2_A$

Unbetretene Ecken: F G H I

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Kürzeste-Wege-Bäume



Das ist das Routenplaner-Problem.

Dijkstra-Algorithmus.

Wir notieren an jeder Ecke Wert und Vorgänger.

Der „Wert" einer Ecke ist seine Entfernung von A.

Die Nachbarn der aktiven Ecke kommen zu den unfertigen Ecken.

Die aktive Ecke ist fertig.

Dabei werden ggf. Ecken neu bewertet.

Eine Ecke mit minimalem Wert wird neue aktive Ecke.

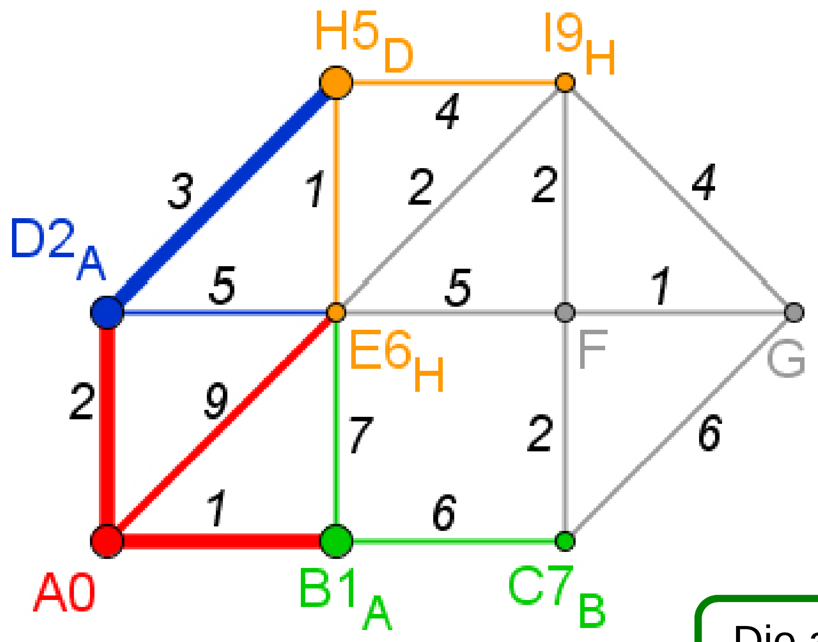
Fertige Ecken: A0, $B1_A$, $D2_A$,

Unfertige Ecken: $E8_B$, $C7_B$, $E7_D$, $H5_D$,

Aktive Ecke wird: $H5_D$

Unbetretene Ecken: F G I

Kürzeste-Wege-Bäume



Das ist das Routenplaner-Problem.

Dijkstra-Algorithmus.

Wir notieren an jeder Ecke Wert und Vorgänger.

Der „Wert“ einer Ecke ist seine Entfernung von A.

Die Nachbarn der aktiven Ecke kommen zu den unfertigen Ecken.

Die aktive Ecke ist fertig.

Dabei werden ggf. Ecken neu bewertet.

Fertige Ecken: A0, B1$_A$, D2$_A$, H5$_D$

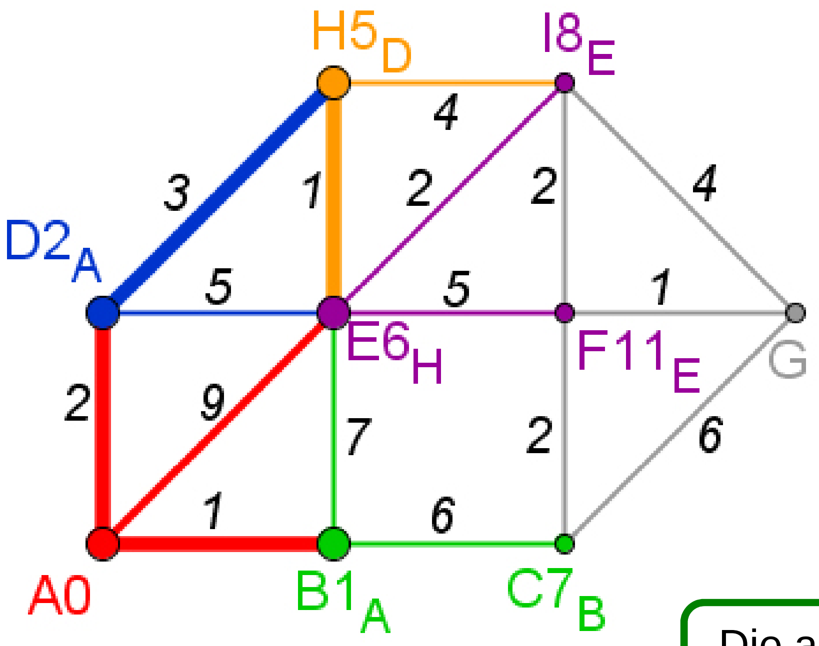
Unfertige Ecken: C7$_B$, E7$_D$, E6$_H$, I9$_H$

Aktive Ecke wird: E6$_H$,

Unbetretene Ecken: F G

Eine Ecke mit minimalem Wert wird neue aktive Ecke.

Kürzeste-Wege-Bäume



Das ist das Routenplaner-Problem.

Dijkstra-Algorithmus.

Wir notieren an jeder Ecke Wert und Vorgänger.

Der „Wert“ einer Ecke ist seine Entfernung von A.

Die aktive Ecke ist fertig.

Die Nachbarn der aktiven Ecke kommen zu den unfertigen Ecken.

Fertige Ecken: A0, $B1_A$, $D2_A$, $H5_D$, $E6_H$

Unfertige Ecken: $C7_B$, $I9_H$, $I8_E$, $F11_E$

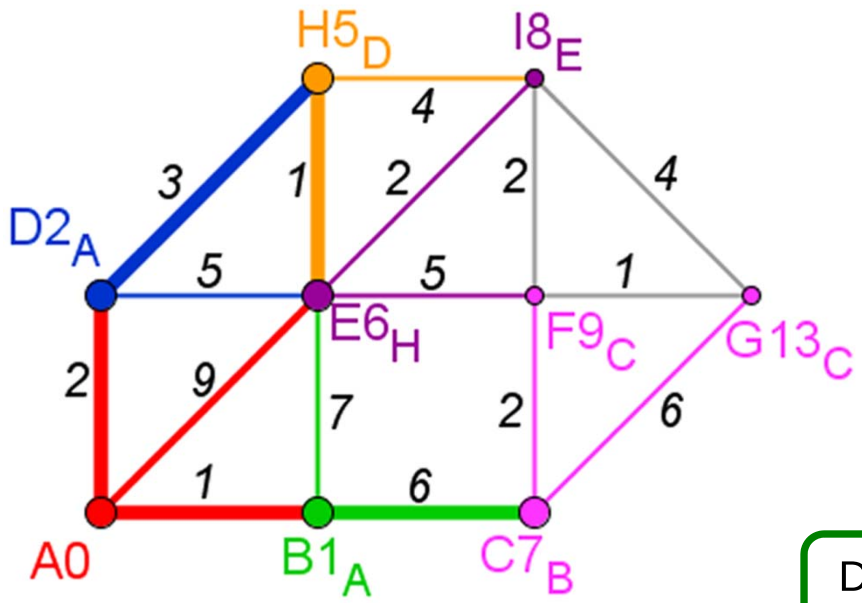
Dabei werden ggf. Ecken neu bewertet.

Aktive Ecke wird: $C7_B$

Eine Ecke mit minimalem Wert wird neue aktive Ecke.

Unbetretene Ecken: G

Kürzeste-Wege-Bäume



Das ist das Routenplaner-Problem.

Dijkstra-Algorithmus.

Wir notieren an jeder Ecke Wert und Vorgänger.

Der „Wert“ einer Ecke ist seine Entfernung von A.

Die aktive Ecke ist fertig.

Die Nachbarn der aktiven Ecke kommen zu den unfertigen Ecken.

Fertige Ecken: A0, $B1_A$, $D2_A$, $H5_D$, $E6_H$, $C7_B$

Unfertige Ecken: $I8_E$, $F11_E$, $F9_C$, G13 $_C$,

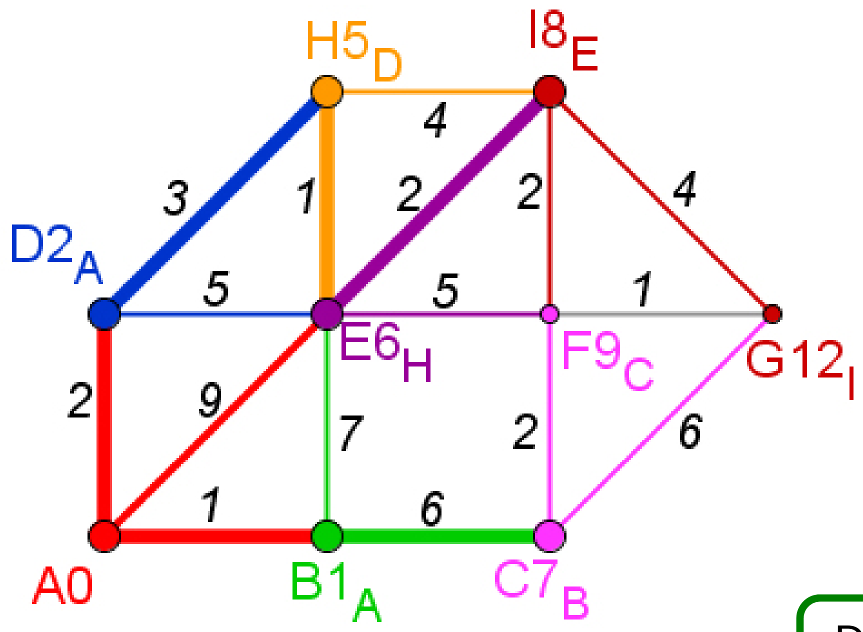
ggf. Ecken neu bewertet.

Aktive Ecke wird: $I8_E$

Unbetretene Ecken:

Eine Ecke mit minimalem Wert wird neue aktive Ecke.

Kürzeste-Wege-Bäume



Das ist das Routenplaner-Problem.

Dijkstra-Algorithmus.

Wir notieren an jeder Ecke Wert und Vorgänger.

Der „Wert“ einer Ecke ist seine Entfernung von A.

Die aktive Ecke ist fertig.

Die Nachbarn der aktiven Ecke kommen zu den unfertigen Ecken.

Fertige Ecken: A0, B1$_A$, D2$_A$, H5$_D$, E6$_H$, C7$_B$, I8$_E$

Unfertige Ecken: F9$_C$, G13 $_C$, G12$_I$,

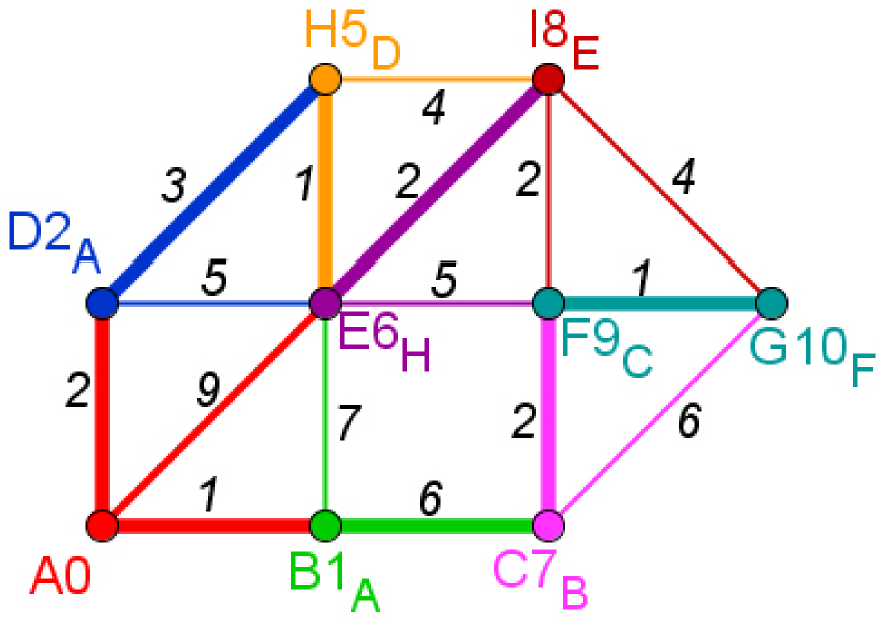
ggf. Ecken neu bewertet.

Aktive Ecke wird: F9$_C$

Unbetretene Ecken:

Eine Ecke mit minimalem Wert wird neue aktive Ecke.

Kürzeste-Wege-Bäume



Das ist das Routenplaner-Problem.

Dijkstra-Algorithmus.

Mit Wert und Vorgänger für jede Ecke haben wir den gesuchten Baum.

Der „Wert“ einer Ecke ist seine Entfernung von A.

Die aktive Ecke ist fertig.

Fertige Ecken: A0, $B1_A$, $D2_A$, $H5_D$, $E6_H$, $C7_B$, $I8_E$, $F9_C$, $G10_F$

Unfertige Ecken: $G12_I$, $G10_F$

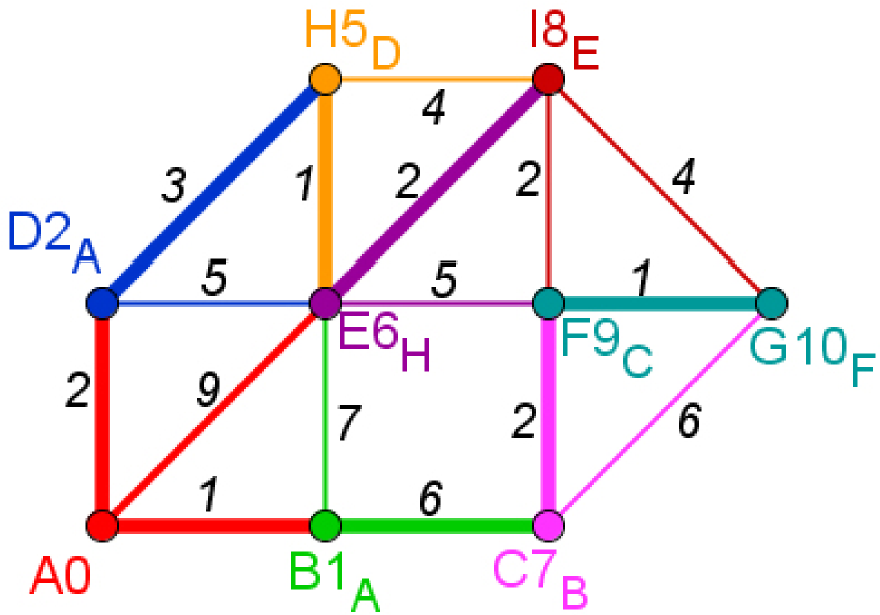
ggf. Ecken neu bewertet.

Aktive Ecke wird: $G10_F$

Unbetretene Ecken:

Die letzte aktive Ecke ist fertig.

Kürzeste-Wege-Bäume



Das ist das Routenplaner-Problem.

Dijkstra-Algorithmus.

Mit Wert und Vorgänger für jede Ecke haben wir den gesuchten Baum.

Der „Wert“ einer Ecke ist seine Entfernung von A.

Fertige Ecken: A0, $B1_A$, $D2_A$, $H5_D$, $E6_H$, $C7_B$, $I8_E$, $F9_C$, $G10_F$

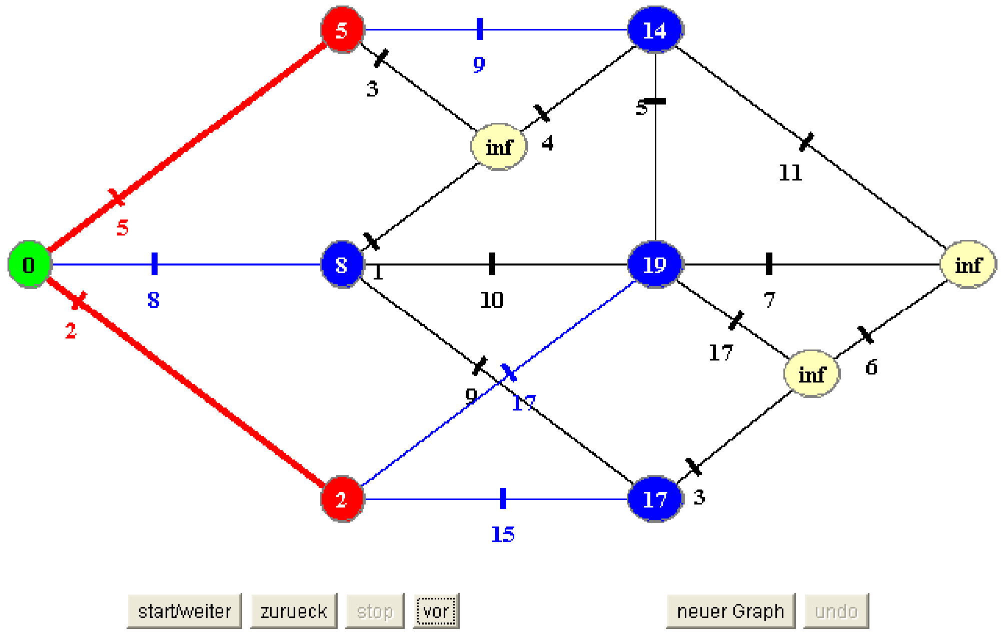
Das ist nun ein kürzeste-Wege-Baum.

http://www-m9.ma.tum.de/Allgemeines/DijkstraApplet

Kürzeste-Wege-Bäume

Das ist das Routenplaner-Problem. Es wird gelöst vom Dijkstra-Algorithmus.

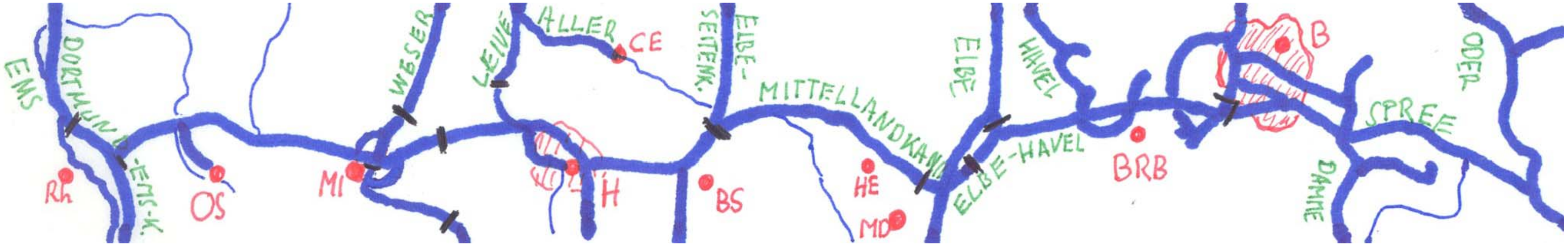
http://www-m9.ma.tum.de/Allgemeines/DijkstraApplet



Interaktive Version an der TU München

Dies ist Aufgabenblatt 6 bei der TUM

Logistik



1. Modellierung des Problems mit Graphen
2. Bewertung des Graphen mit
    1. Fahrzeiten oder
    2. Fahrkosten
    3. Streckenlänge….

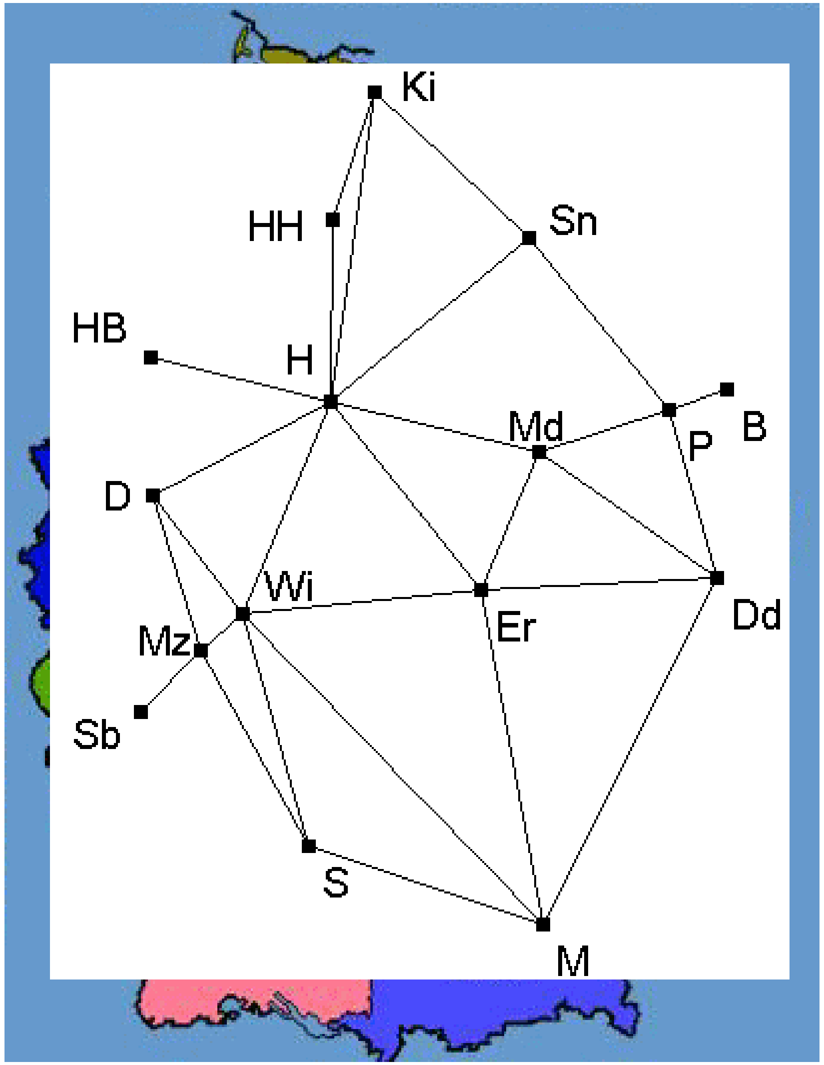
Lösung des Kürzeste-Wege-Problems

Landkarten färben

Wie viele Farben braucht man, wenn benachbarte Länder verschieden gefärbt sein sollen?

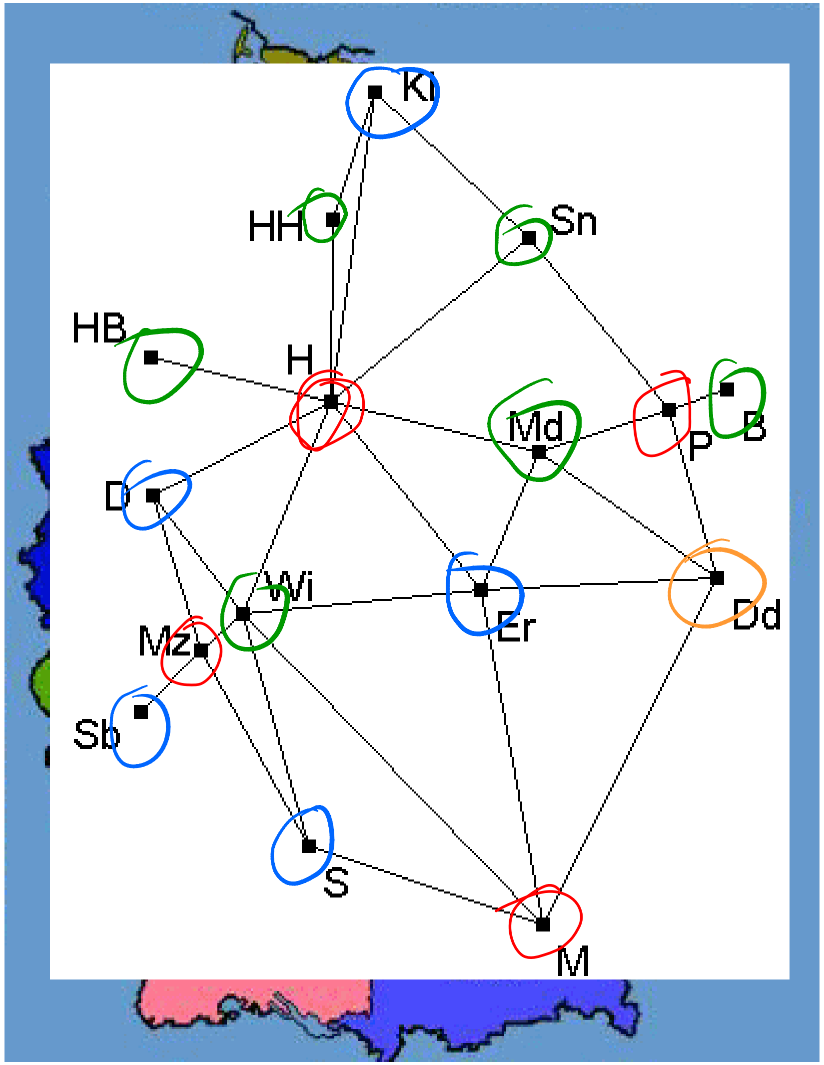
Modellierung des Problems mit Graphen:

Landkarten färben mit Graphentheorie



Wie viele Farben braucht man, wenn benachbarte Hauptstädte verschieden gefärbt sein sollen?

Landkarten färben mit Graphentheorie



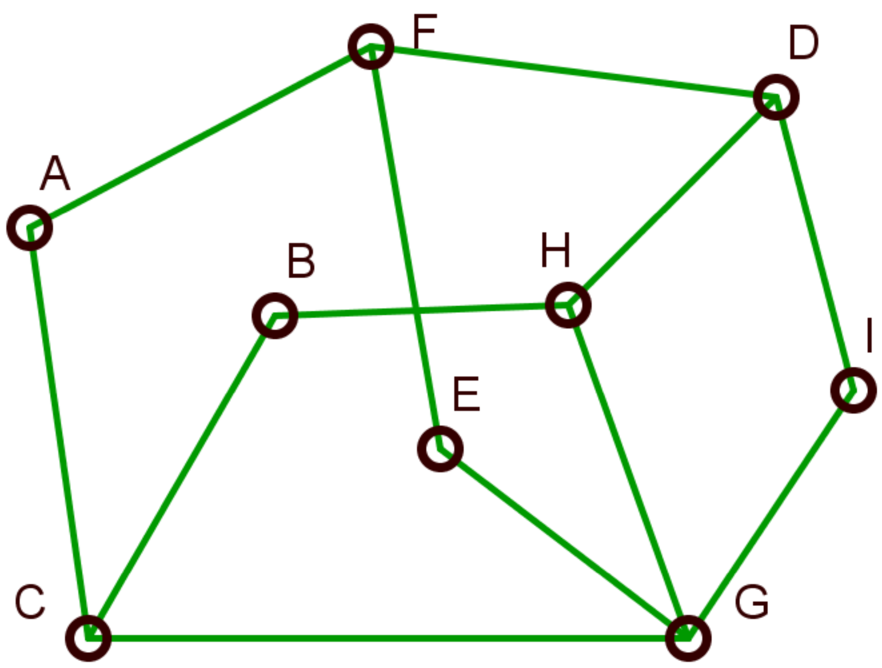
Wie viele Farben braucht man, wenn benachbarte Hauptstädte verschieden gefärbt sein sollen?

Vier-Farben-Satz

Es reichen immer vier Farben

Erst 1976 mit Computereinsatz bewiesen (Appel, Haken)

Eckenfärbung von Graphen

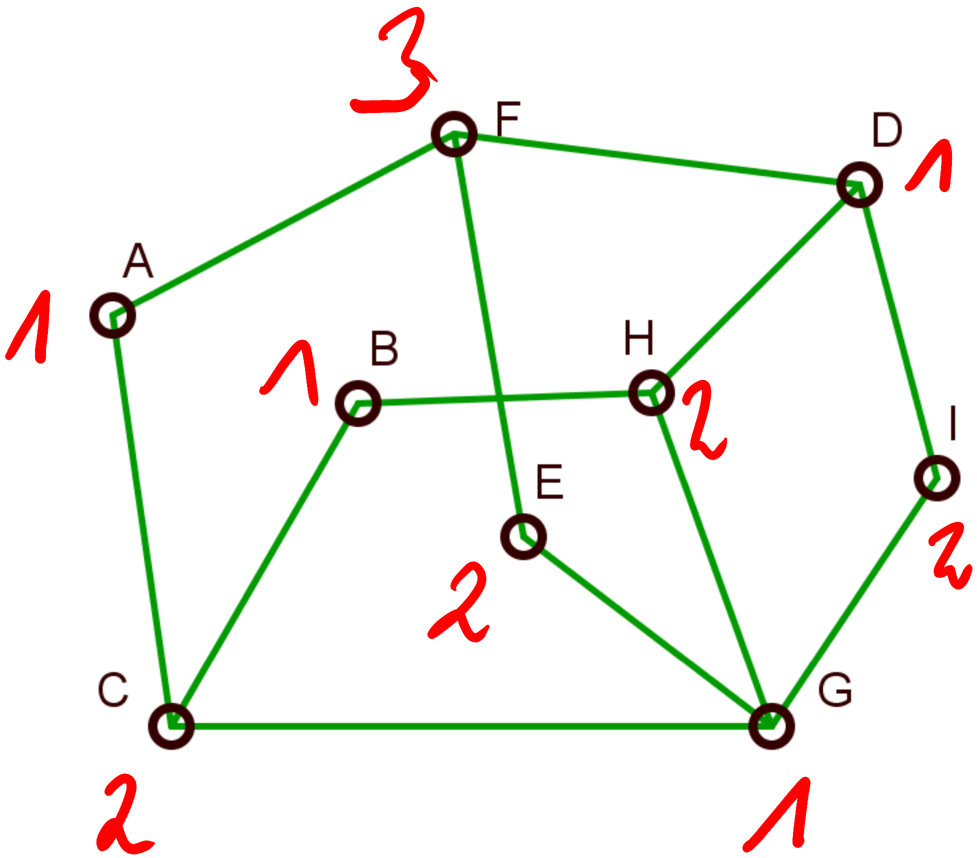


Die Ecken sollen so gefärbt werden, dass benachbarte Ecken verschiedene Farben haben

Gibt es einen hier Eulerschen Weg?

Achtung: Der 4-Farbensatz gilt nur für Graphen ohne Kantenkreuzungen.

Eckenfärbung von Graphen

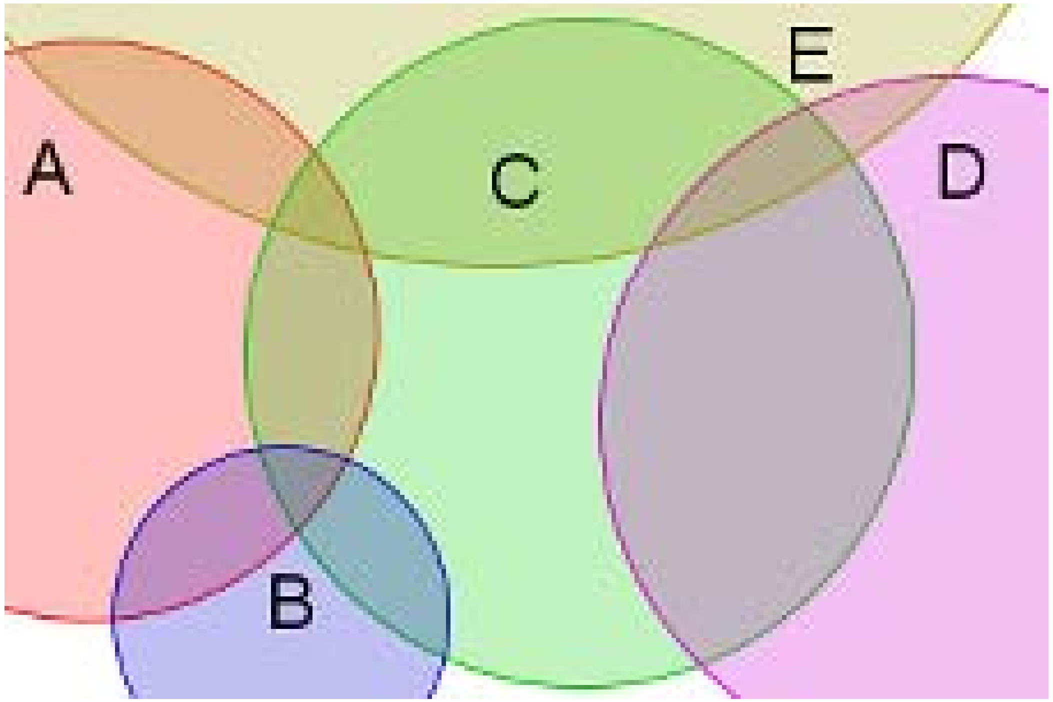


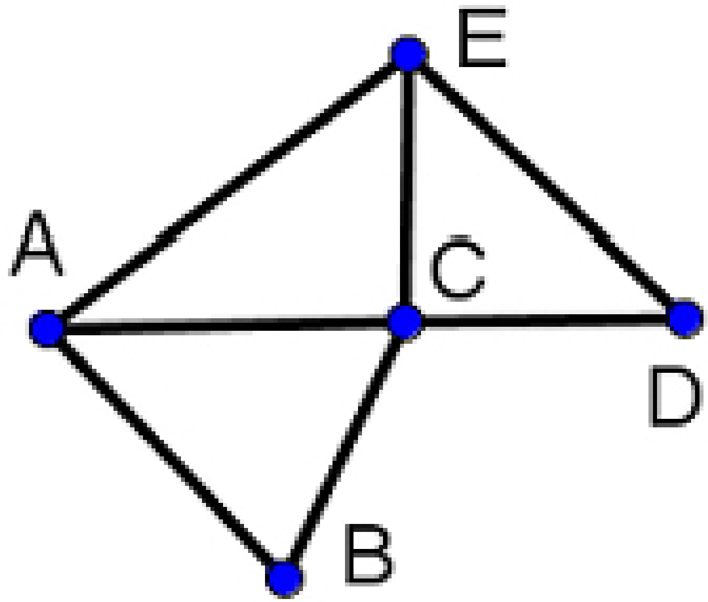
Die Ecken sollen so gefärbt werden, dass benachbarte Ecken verschiedene Farben haben

Eulerschen Weg?
Nein, 3 Ecken mit ungeradem Grad, durften höchstens 2 sein.

Achtung: Der 4-Farbensatz gilt nur für Graphen ohne Kantenkreuzungen.

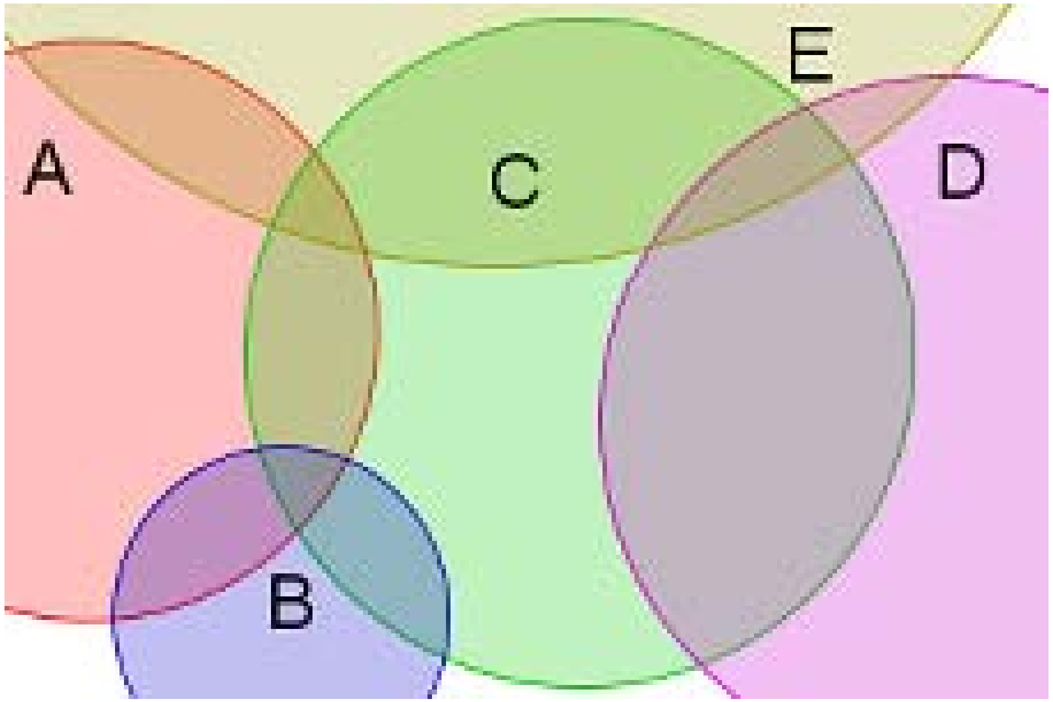
Mobilfunk-Konfliktgraphen

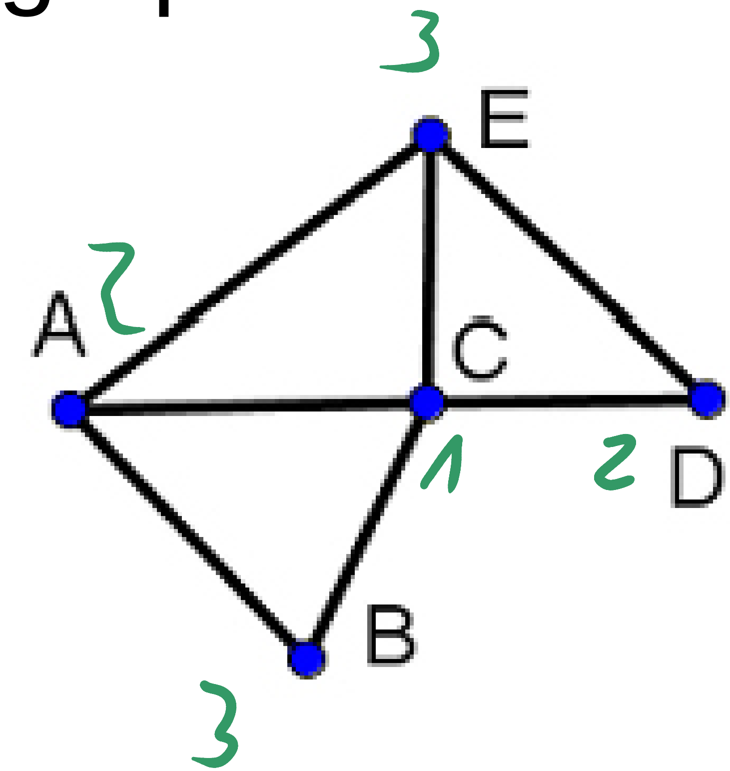




Überlappende Handybereiche brauchen verschiedene Sendefrequenzen. Eine Eckenfärbung des **Konflikt-graphen** zeigt, wie man Frequenzen zuordnen kann.

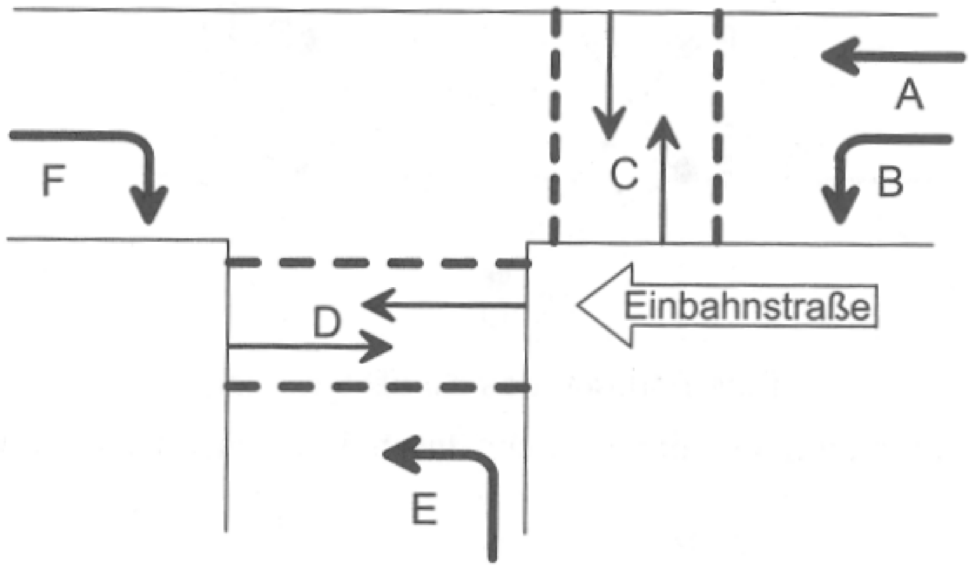
Mobilfunk-Konfliktgraphen





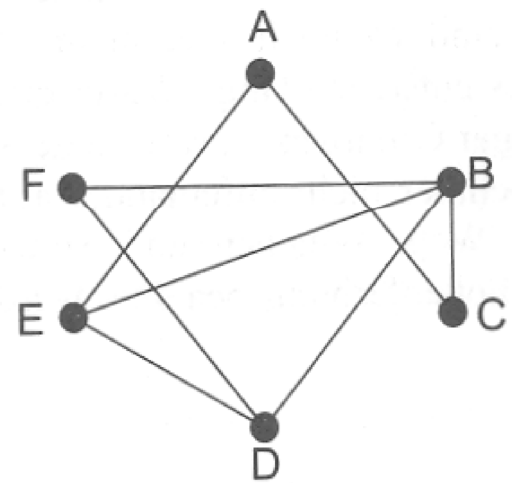
Überlappende Handybereiche brauchen verschiedene Sendefrequenzen. Eine Eckenfärbung des Konflikt-graphen zeigt, wie man Frequenzen zuordnen kann.

Konflikt-Graphen



Eine verkehrsreiche Einmündung

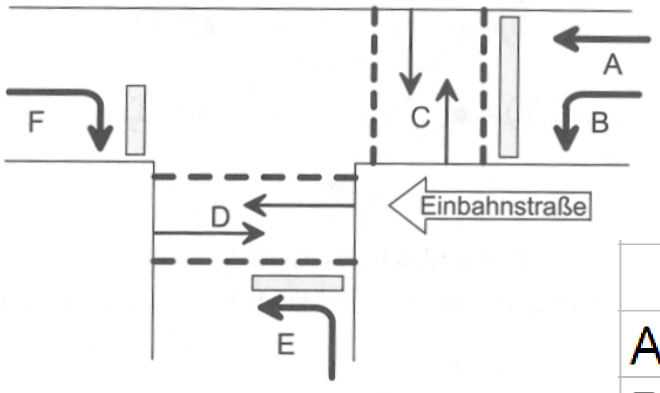
Konfliktgraphen.



Der Konfliktgraph der Einmündung

Die Verkehrsströme werden Ecken.
Wenn zwei in Konflikt geraten, werden sie durch eine Kante verbunden.

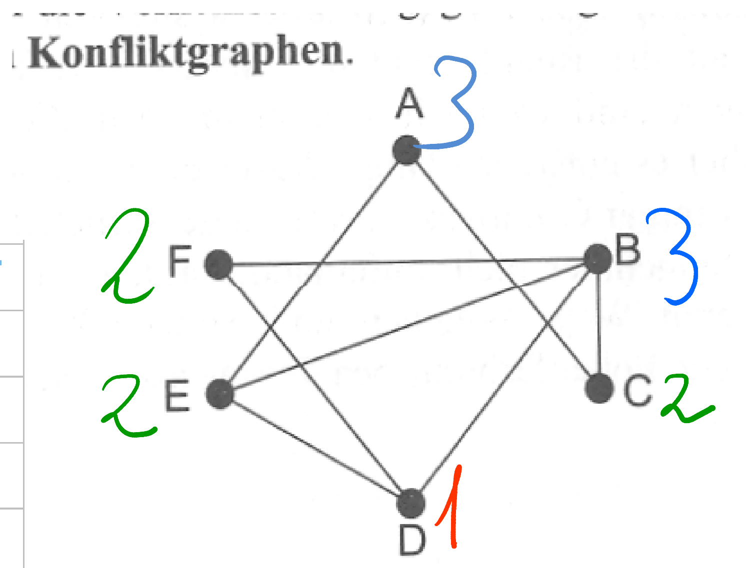
Konflikt-Graphen



Eine verkehrsreiche Einmündung

Adjazenzmatrix dazu

	A	B	C	D	E	F
A			x		x	
B			x	x	x	x
C	x	x				
D		x			x	x
E	x	x		x		
F		x		x		

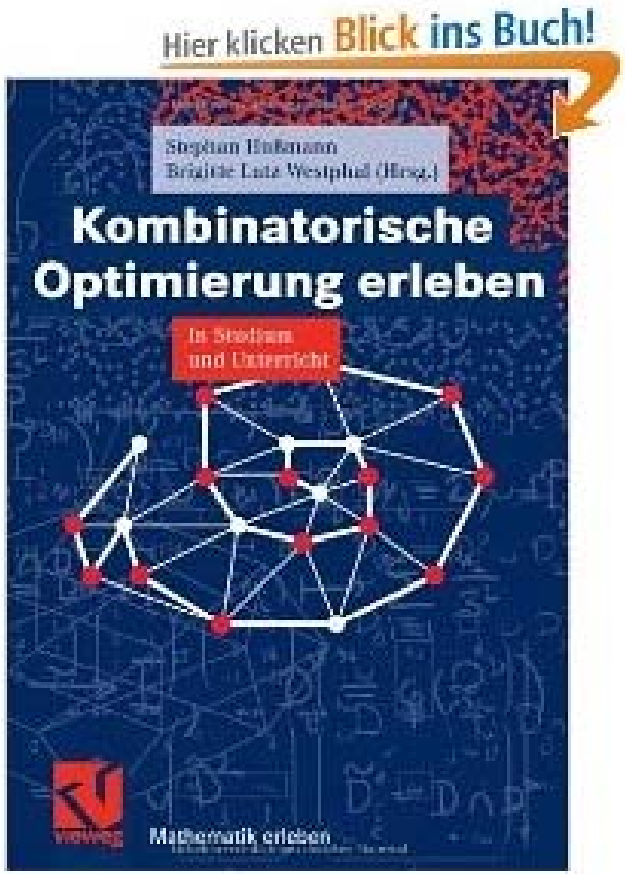


Der Konfliktgraph der Einmündung

Die Verkehrsströme werden Ecken. Wenn zwei in Konflikt geraten, werden sie durch eine Kante verbunden.
Eine zulässige Eckenfärbung des Graphen zeigt: Verkehrsströme mit der gleichen Farbe dürfen gleichzeitig „Grün“ an ihrer Ampel haben.

Mehr dazu im Buch Nitzsche: Graphentheorie, tw.moodle Kap 11

Graphentheorie in Büchern



Kombinatorische Optimierung erleben:
Im Studium und Unterricht
Stephan Hußmann (Autor),
Brigitte Lutz-Westphal (Autor)

Manfred Nitzsche