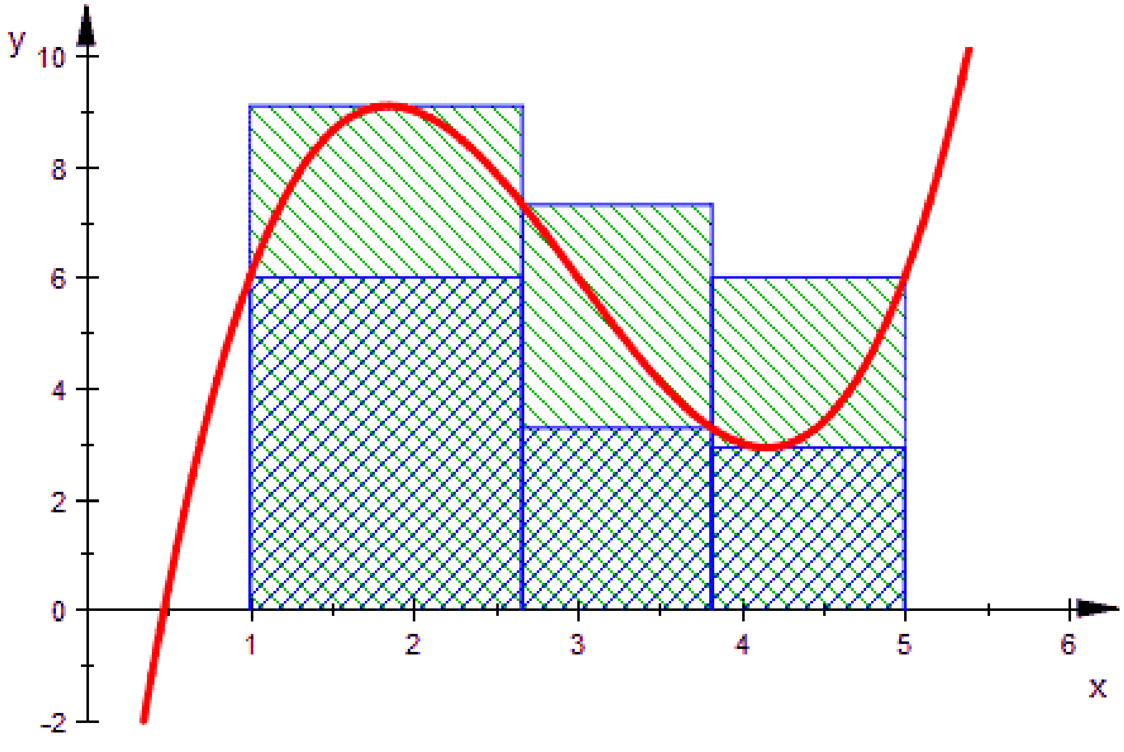
Infinitesimales

Hier wächst Ihr Wissen über das unendlich Kleine



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Der Modellierungskreislauf

Ein erfundenes Beispiel:

16 Uhr Unfall mit Fahrerflucht in Hann. Münden

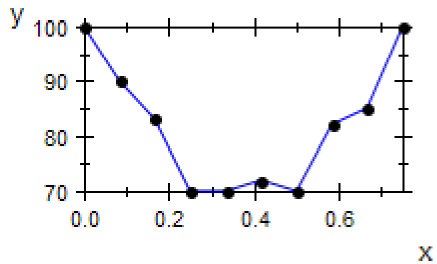
Ein Zeuge glaubt einen Transporter mit reichlich Werbeschrift gesehen zu haben.

Der Besitzer behauptet er sei um 16 Uhr gar nicht in Hann.Münden gewesen.

Der Modellierungskreislauf

Um 15 Uhr war er nachweislich noch in Bodenwerder, 80 km entfernt.

Der Fahrtenschreiber zeigt:



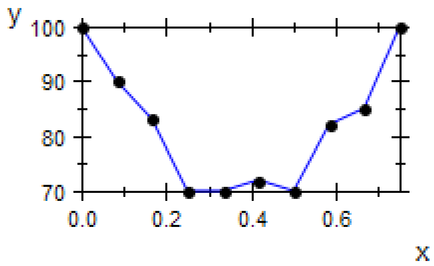
Reale Situation

Länge der gefahrenen Strecke ist gesucht.

Der Modellierungskreislauf

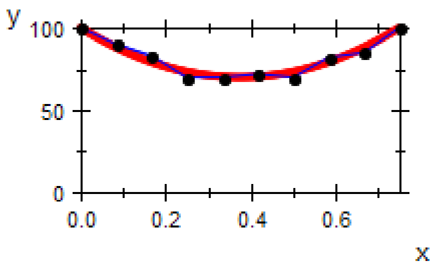
Um 15 Uhr war er nachweislich noch in Bodenwerder, 80 km entfernt.

Der Fahrtenschreiber zeigt:



Reale Situation

Länge der gefahrenen Strecke ist gesucht.



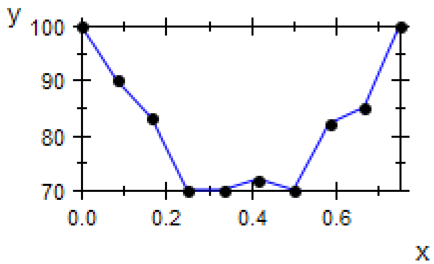
mathematisches Modell

Fläche unter der Modellkurve gesucht.

Der Modellierungskreislauf

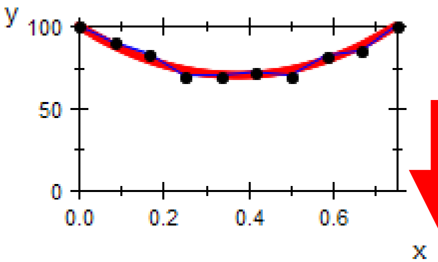
Um 15 Uhr war er nachweislich noch in Bodenwerder, 80 km entfernt.

Der Fahrtenschreiber zeigt:



Reale Situation

Länge der gefahrenen Strecke ist gesucht.



mathematisches Modell

Fläche unter der Modellkurve gesucht.

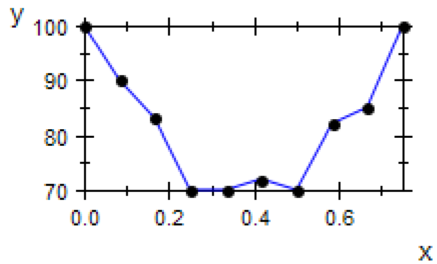
mathematische Lösungsidee

$$s = \int_0^{0.75} v(t)\, dt$$

Der Modellierungskreislauf

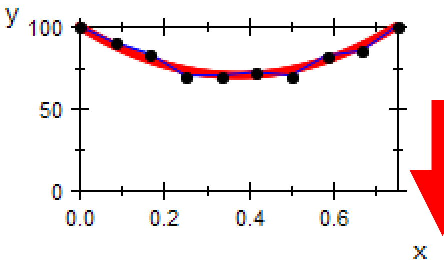
Um 15 Uhr war er nachweislich noch in Bodenwerder, 80 km entfernt.

Der Fahrtenschreiber zeigt:



Reale Situation

Länge der gefahrenen Strecke ist gesucht.



mathematisches Modell

Fläche unter der Modellkurve gesucht.

mathematische Lösungsidee

$$s = \int_{0}^{0.75} v(t)\, d\,t$$

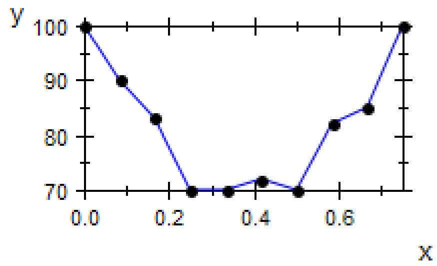
mathematische Antwort

$$s = 60\ km$$

Der Modellierungskreislauf

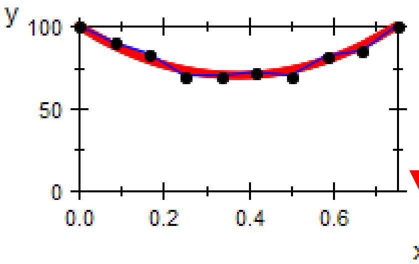
Um 15 Uhr war er nachweislich noch in Bodenwerder, 80 km entfernt.

Der Fahrtenschreiber zeigt:



Reale Situation

Länge der gefahrenen Strecke ist gesucht.



mathematisches Modell

Fläche unter der Modellkurve gesucht.

mathematische Lösungsidee

$$s = \int_0^{0.75} v(t)\, dt$$

mathematische Antwort

$$s = 60\ km$$

Funktionen werden zum Werkzeug

Man erhält Antworten beim

Blick auf „das Ganze“ mit dem Integral

integer (lat.)= ganz

pane integrale (it.) = Vollkornbot

$$\int f(x)\,dx$$

Funktionen beschreiben Zusammenhänge

Man erhält punktuelle Antworten mit dem Differential

$$df, \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x)$$

Das Integral

$$\int f(x)dx$$

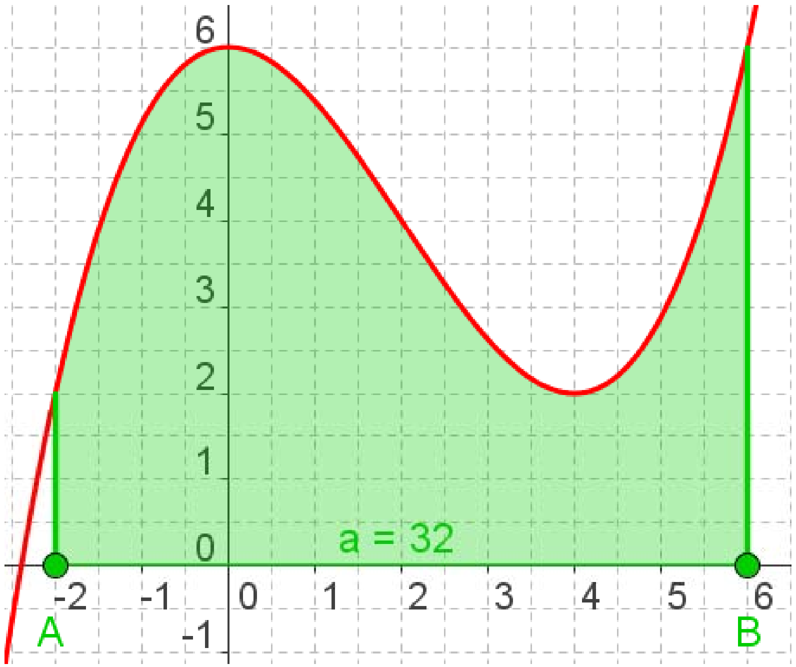
Man erhält Antworten beim

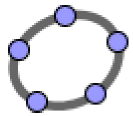
Blick auf „das Ganze“ mit dem Integral

integer (lat.)= ganz

pane integrale (it.) = Vollkornbot

$$\int_a^b f(x)dx$$





Das Riemannsche Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

Bernhard Riemann

Abi 1846

Johanneum Lüneburg

Originaltext aus „Gesammelte Werke“

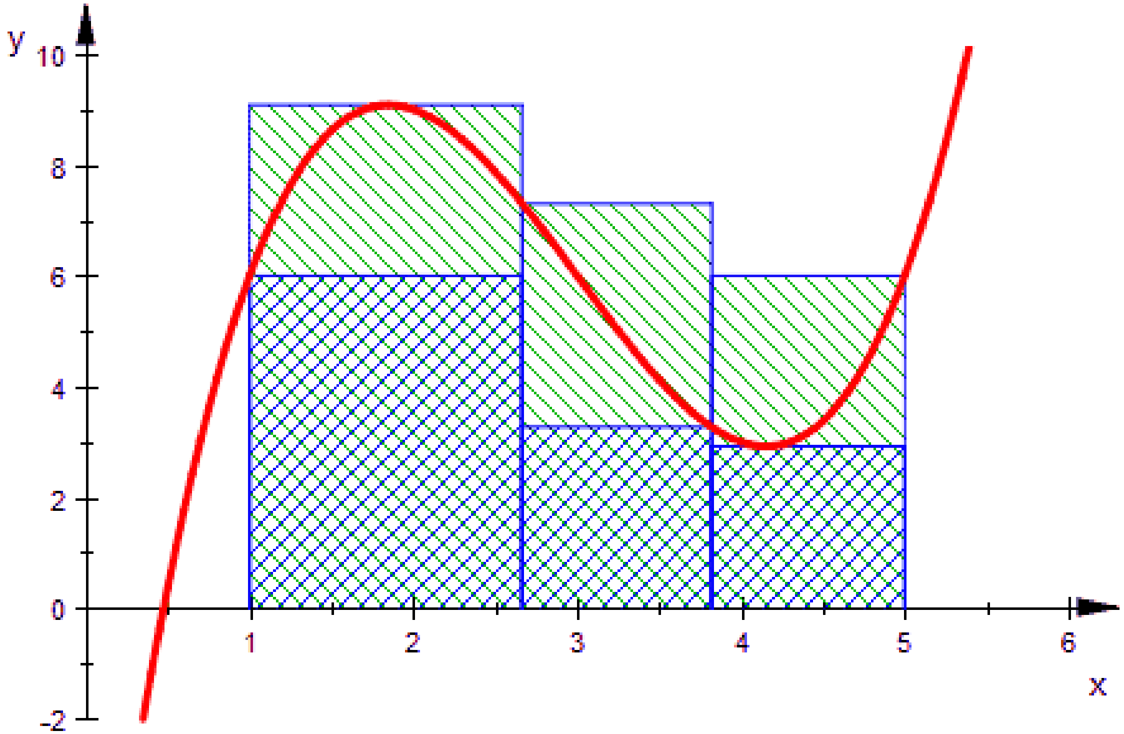
Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?

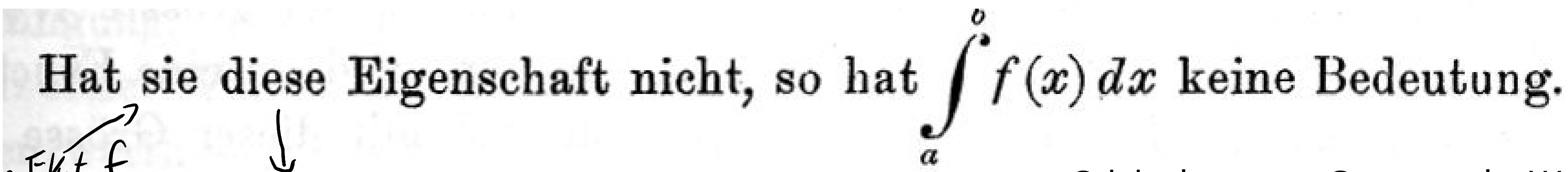
$\int_a^b f(x)dx$ Riemannsches Integral



Bernhard Riemann

Abi 1846

Johanneum Lüneburg



die Fkt f

, bei jeder Zerlegung denselben Grenzwert zu haben,

Originaltext aus „Gesammelte Werke“

Das Integral als verallgemeinertes Produkt

v konstant $s = v \cdot t$ $v = v(t)$ variabel

Geschwindigkeit Weg Zeit

$$s = \int_a^b v(t)\, d\, t$$

Integral für 3D-Flächen, Volumen, Schwerpunkt, Bilanzen....

Das Integral als verallgemeinertes Produkt

v konstant $\quad s = v \cdot t \quad$ $v = v(t)$ variabel

Geschwindigkeit Weg Zeit

$$s = \int_a^b v(t)\, dt$$

F konstant $\quad W = F \cdot s$

Kraft Arbeit Weg

$$F = F(s)$$

$$W = \int_a^b F(s)\, ds$$

Integral für 3D-Flächen, Volumen, Schwerpunkt, Bilanzen....

Das Integral als verallgemeinertes Produkt

v konstant $\quad s = v \cdot t \quad$ $v = v(t)$ variabel

Geschwindigkeit Weg Zeit

$$s = \int_a^b v(t)\, dt$$

F konstant $\quad W = F \cdot s \quad$ $F = F(s)$

Kraft Arbeit Energie Weg

$$W = \int_a^b F(s)\, ds$$

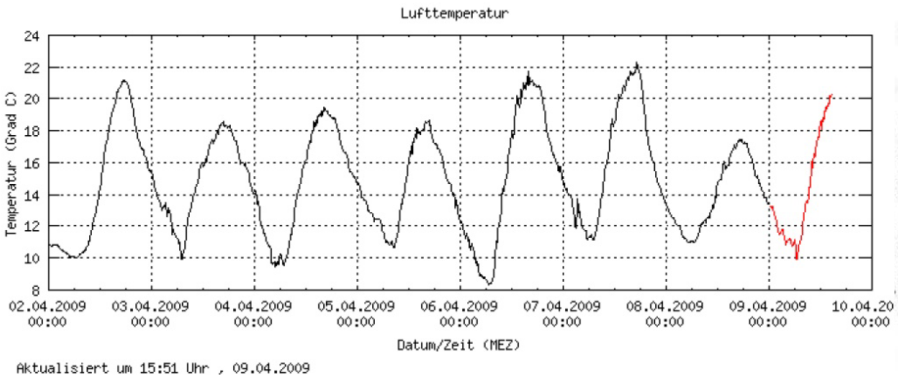
R konstant $\quad U = R \cdot I \quad$ $R = R(I)$ variabel

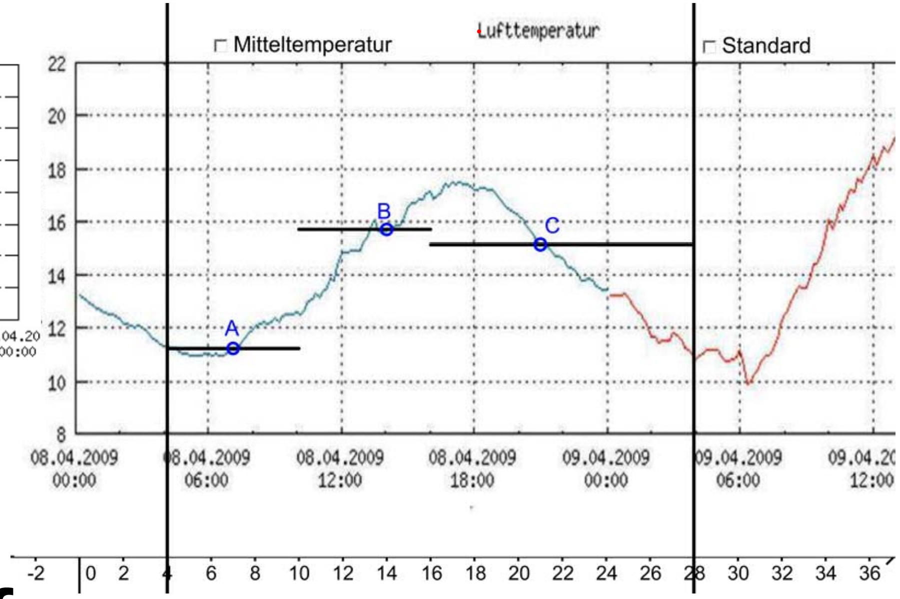
Widerstand Spannung Stromstärke

$$U = \int_a^b R(I)\, dI$$

Integral für 3D-Flächen, Volumen, Schwerpunkt, Bilanzen....

Das Integral für den verallgemeinerten Mittelwert





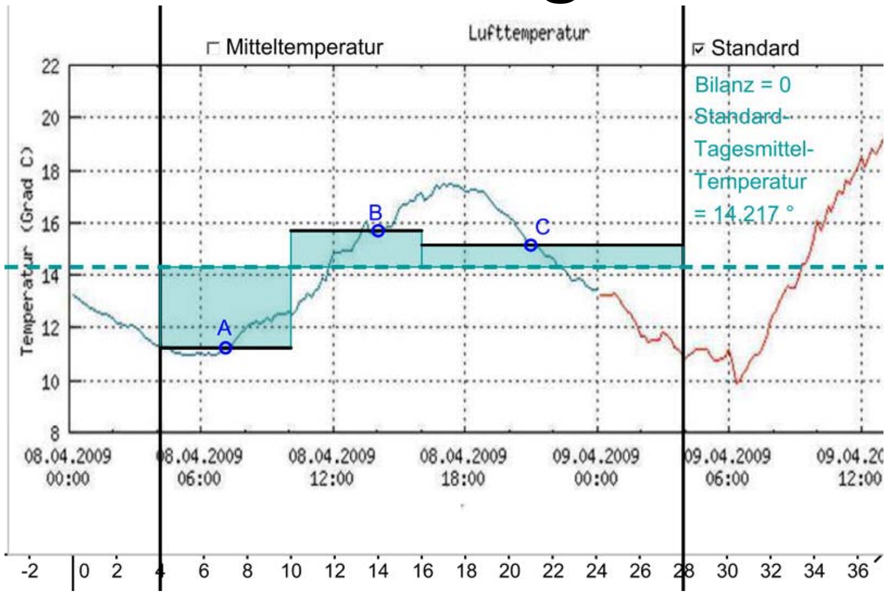
Wetter

Temperaturverlauf

$$T_{\mathbf{mittel}} = \frac{1}{4}\left(T_7 + T_{14} + 2 \cdot T_{21}\right)$$

Integral für Mittelwert und Bilanzen....

Das Integral für den verallgemeinerten Mittelwert



Ist die Modellierung der

Metereologen

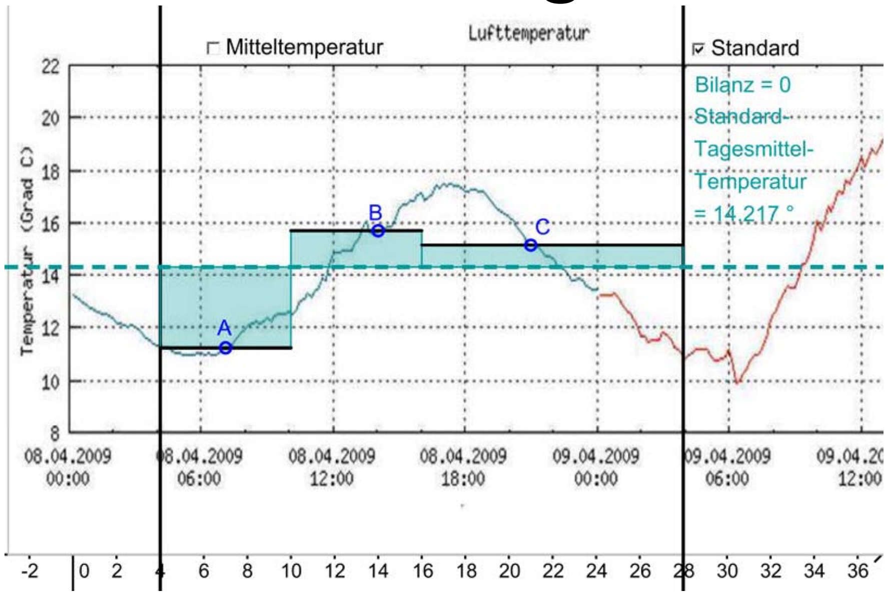
nicht viel zu grob?????

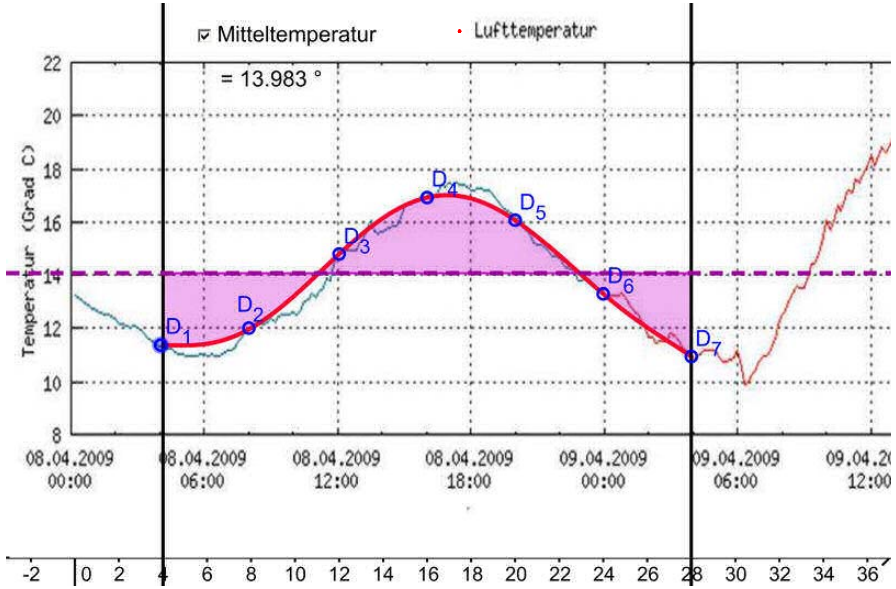
$$T_{\mathbf{mittel}} = \frac{1}{4}\left(T_7 + T_{14} + 2 \cdot T_{21}\right)$$

Flächenbilanz=0

Integral für Mittelwert und Bilanzen....

Das Integral für den verallgemeinerten Mittelwert



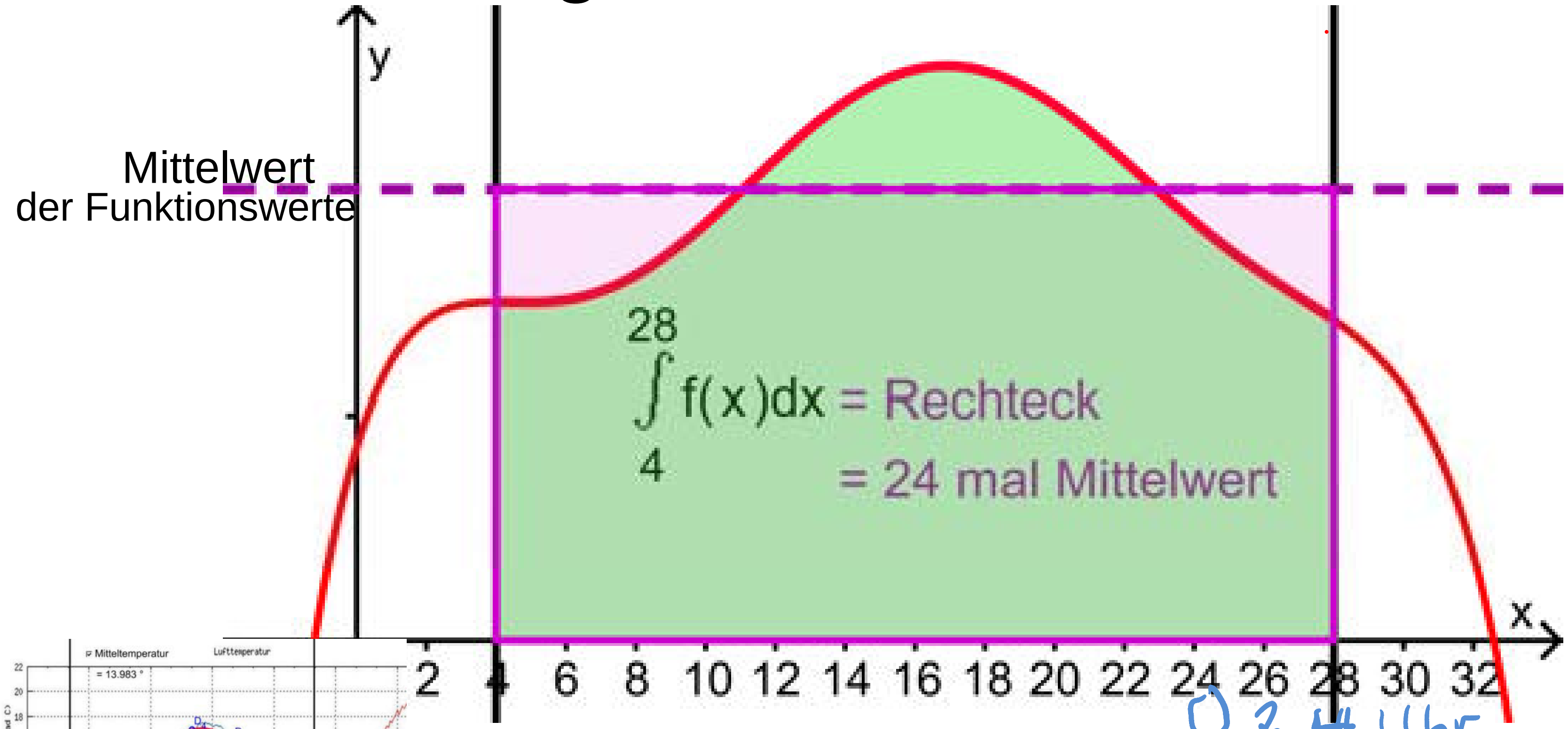


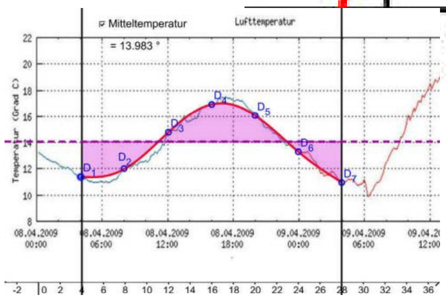
$$T_{\mathbf{mittel}} = \frac{1}{4}\left(T_7 + T_{14} + 2 \cdot T_{21}\right)$$

Flächenbilanz=0

Integral für Mittelwert und Bilanzen....

Das Integral für den verallgemeinerten Mittelwert

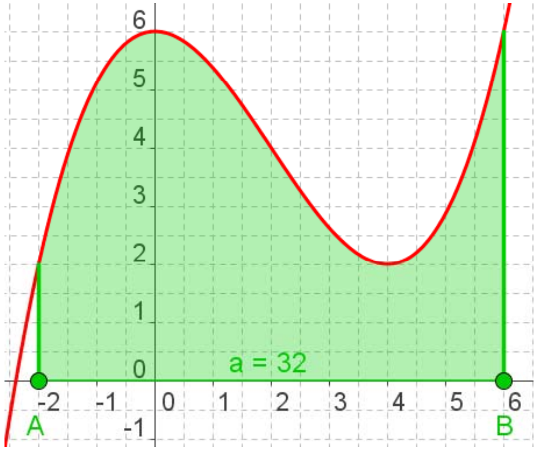




$$\text{Mittelwert} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

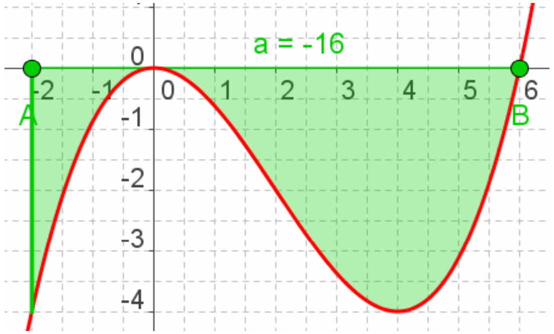
Integral für 3D-Flächen, Volumen, Schwerpunkt, Bilanzen....

Eigenschaften des Integrals



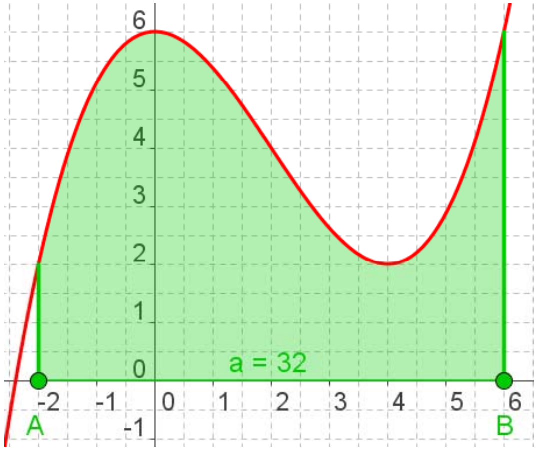
$$\int_a^b f(x)dx$$

Intervall [A,B]



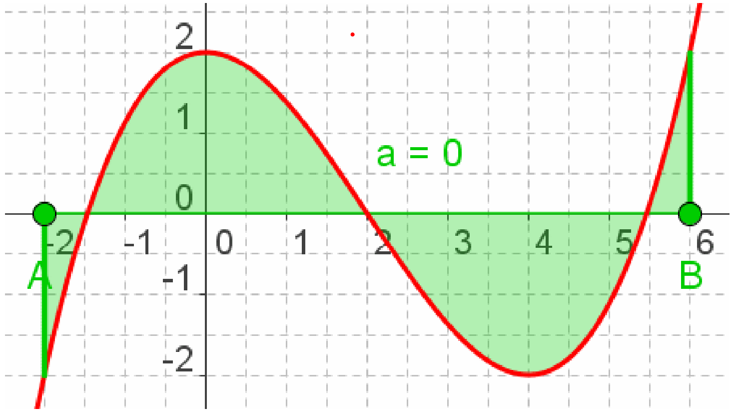
Sind die Werte von f im ganzen Intervall negativ, dann ist auch das Integral negativ.

Eigenschaften des Integrals

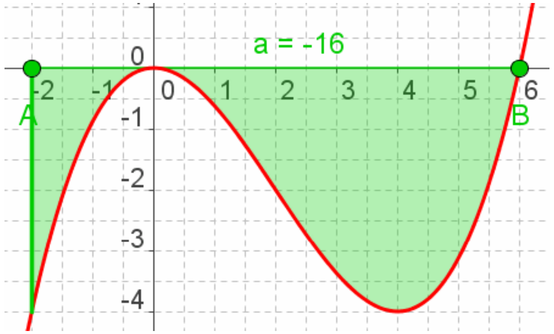


$$\int_a^b f(x)dx$$

Intervall [A,B]

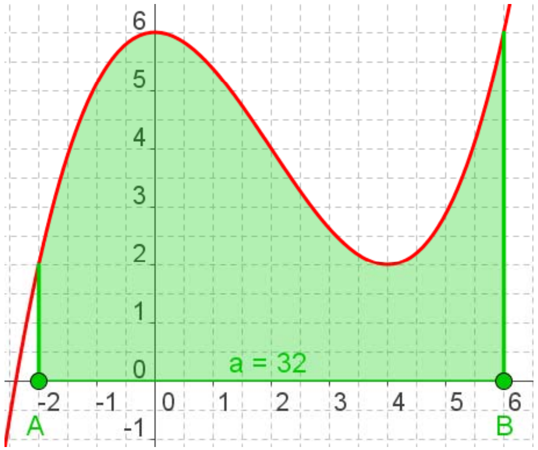


Das Integral ist eine Flächenbilanz mit negativen und positiven Flächen.



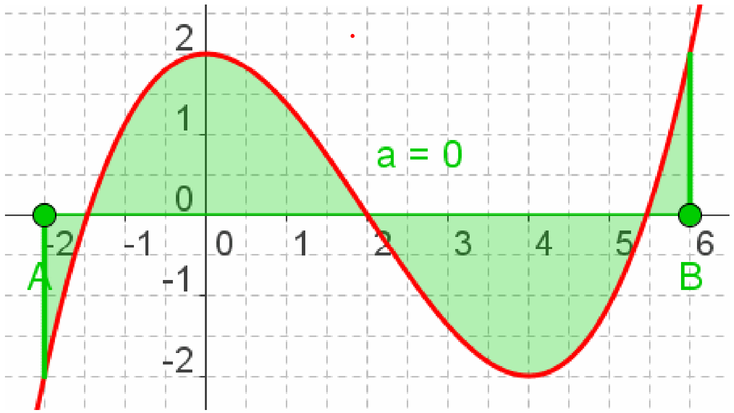
Sind die Werte von f im ganzen Intervall negativ, dann ist auch das Integral negativ.

Eigenschaften des Integrals

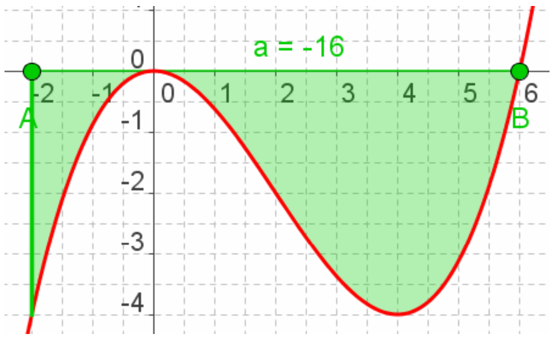


$$\int_a^b f(x)dx$$

Intervall [A,B]



Das Integral ist eine Flächenbilanz mit negativen und positiven Flächen.



Beim Vertauschen der Grenzen ändert sich das Vorzeichen des Integrals

Sind die Werte von f im ganzen Intervall negativ, dann ist auch das Integral negativ.

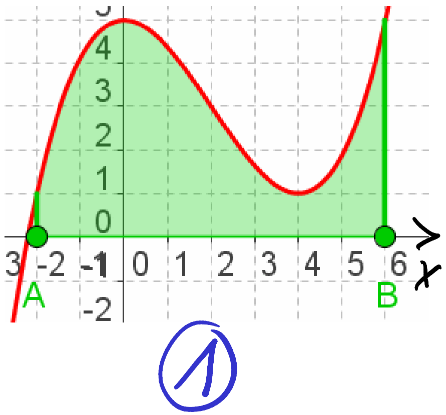
Übungen zum Integral

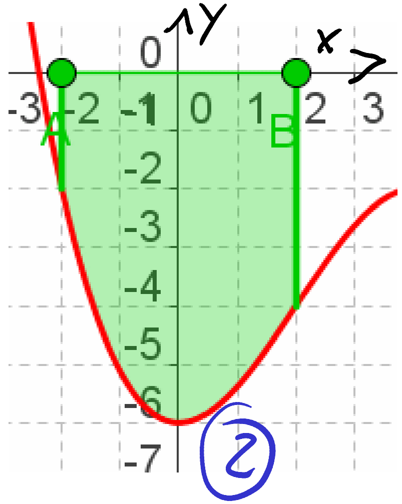
$$\int_a^b f(x)dx$$

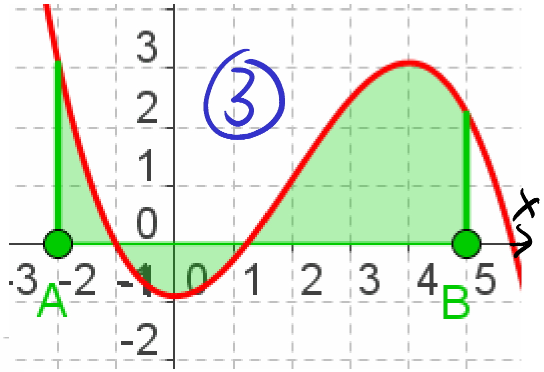
Intervall [A,B]

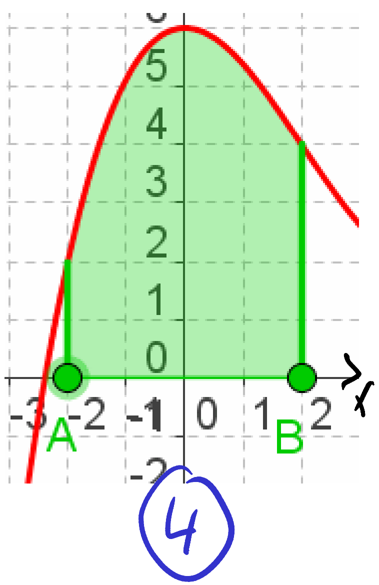
$\pm 8, \pm 20, \pm 24$

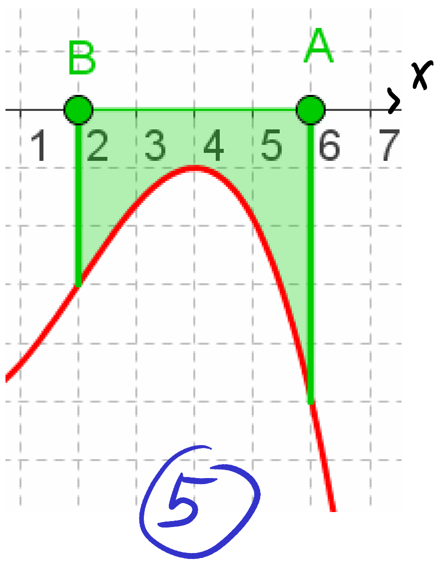
mögliche Werte

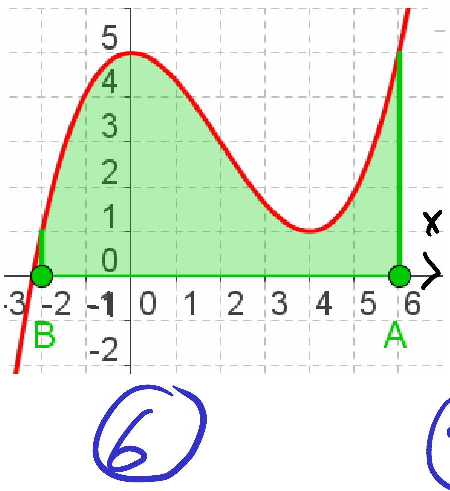


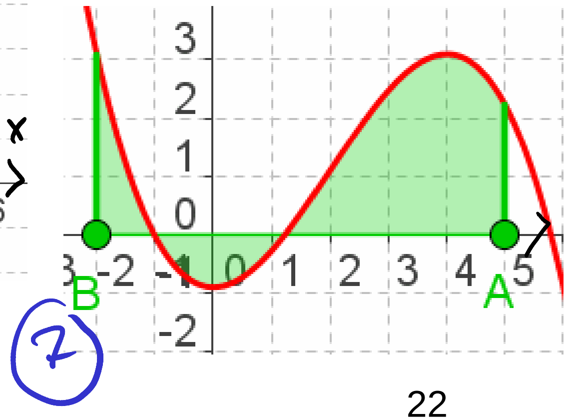








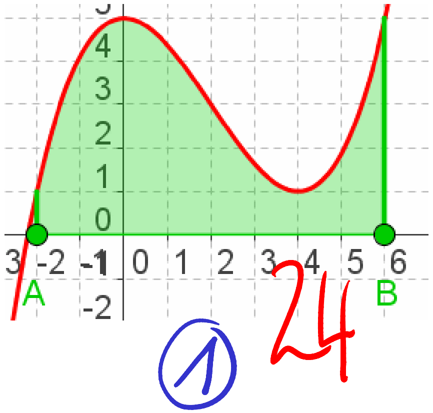


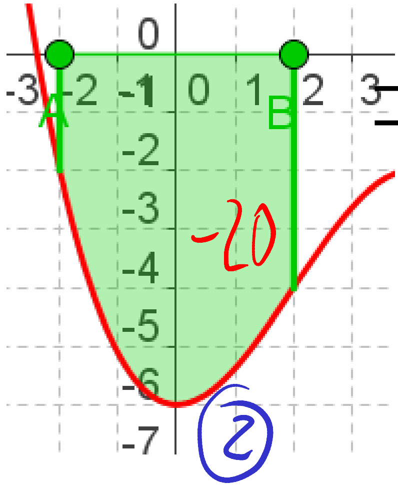


Übungen zum Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

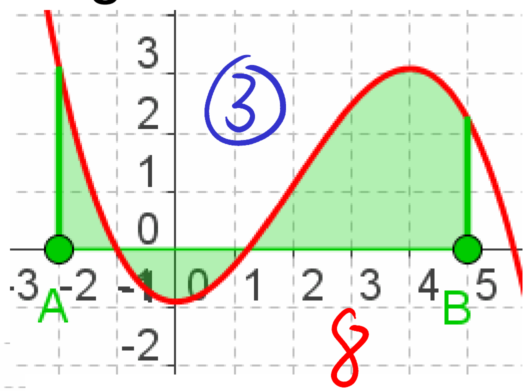
Intervall [A,B]

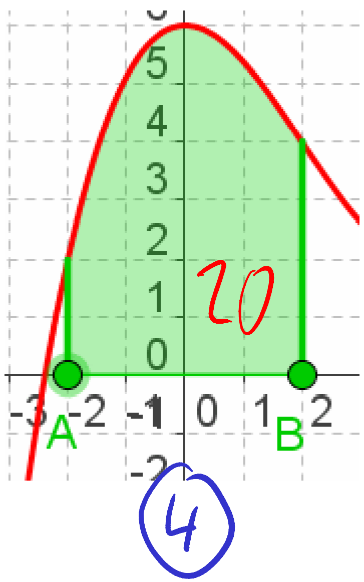


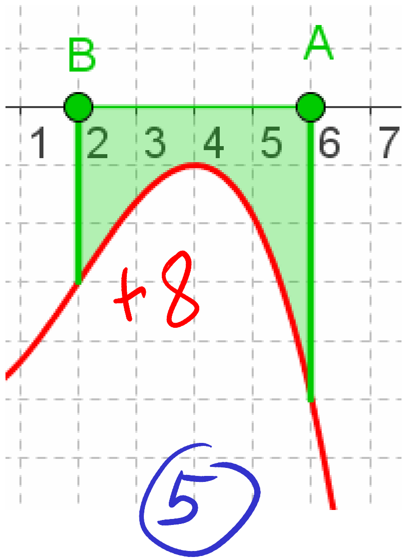


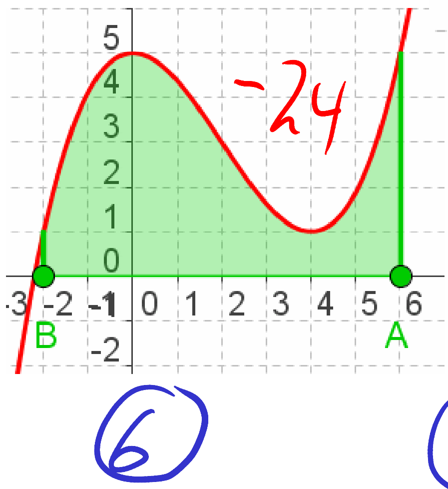
$\pm 8, \pm 20, \pm 24$

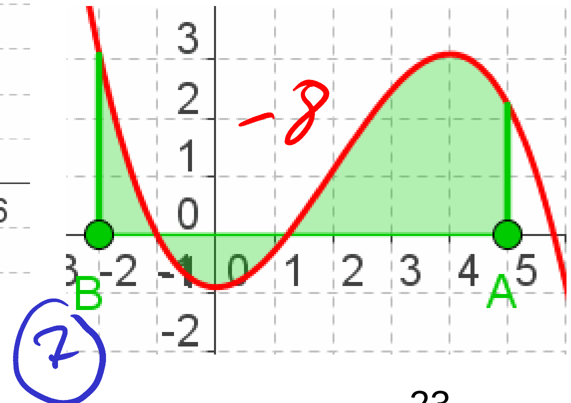
mögliche Werte











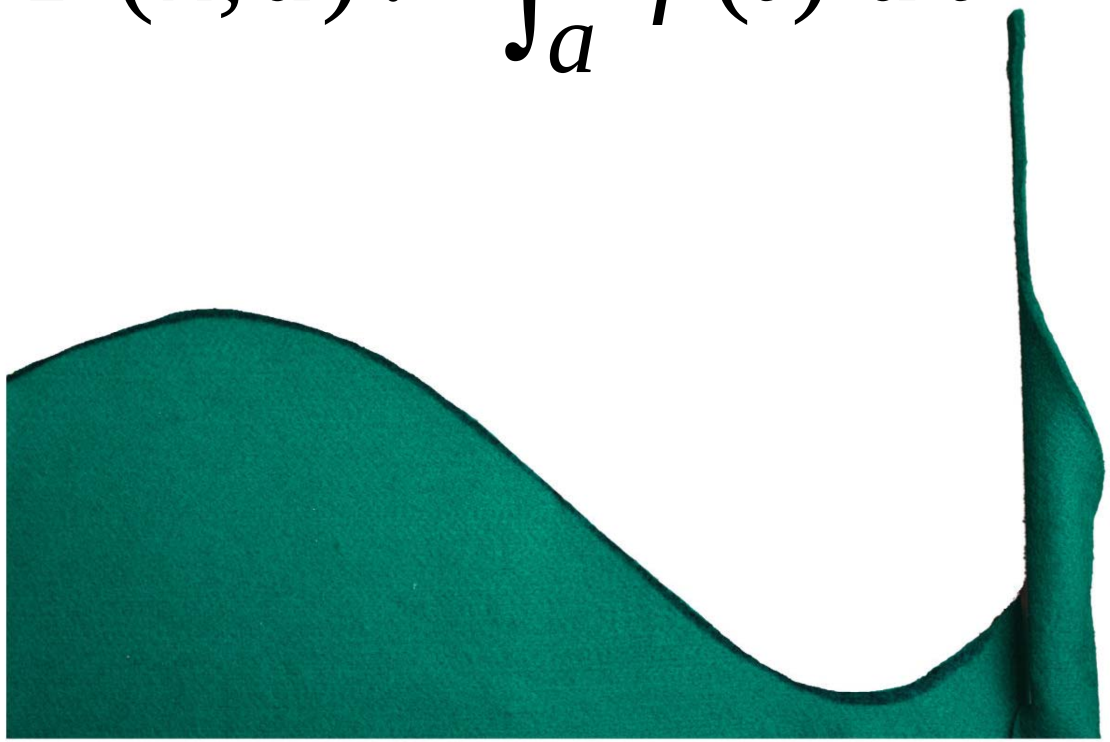
Die Integralfunktion

„Teppich-Abroll-Funktion“

$$F(x,a) := \int_a^x f(t)\, dt$$

a

x



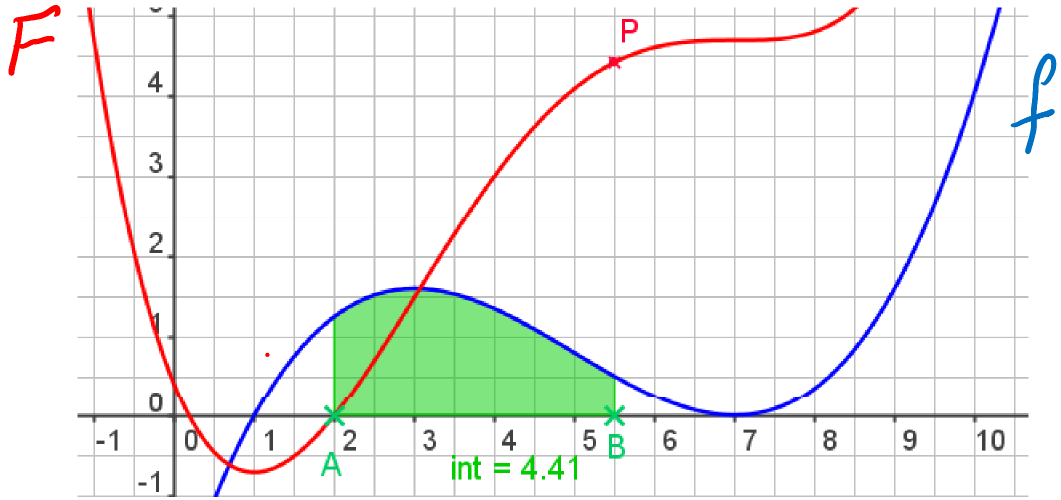
a

x

Die Integralfunktion

$$F(x,a) := \int_a^x f(t)\,dt$$

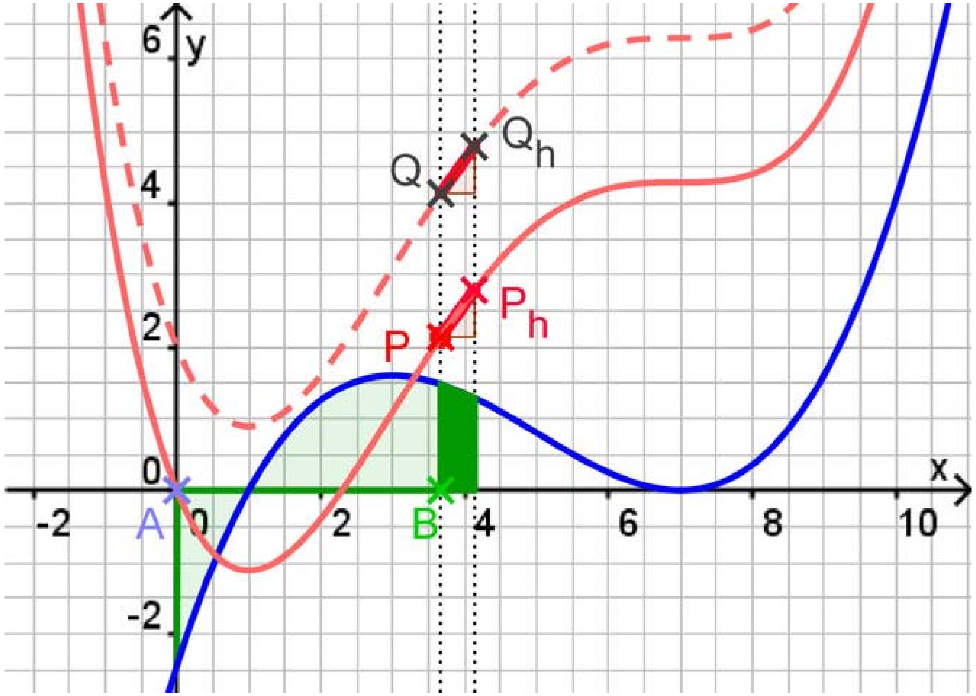
„Teppich-Abroll-Funktion“



Ordinate von P zeigt die abgerollte Fläche an.

Die Integralfunktion

$$F(x,a) := \int_a^x f(t)\,dt$$

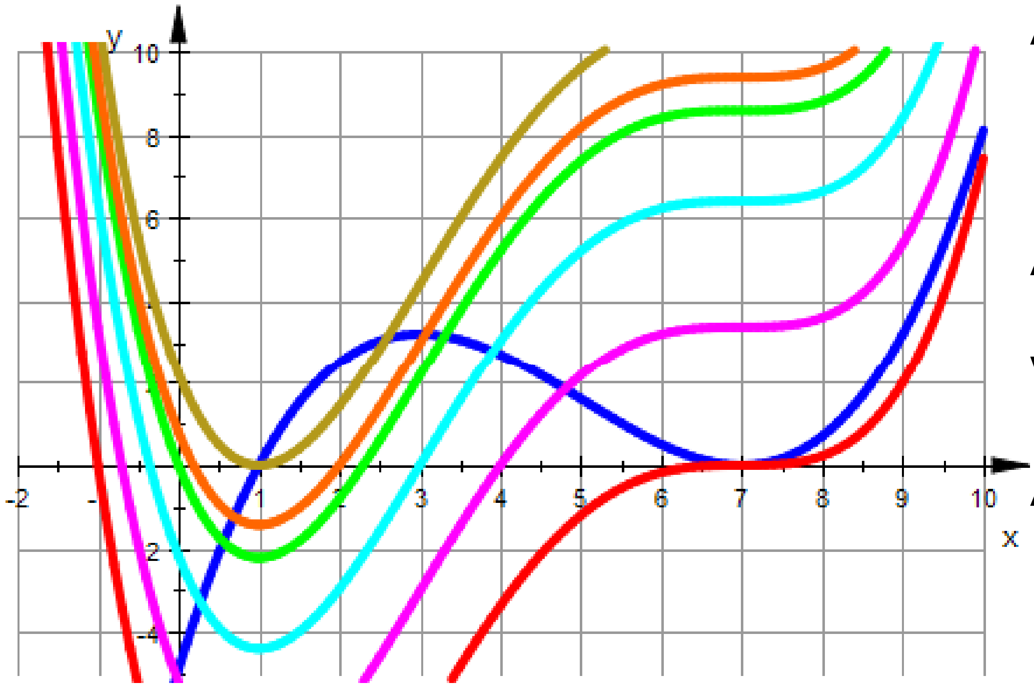


Der Zuwachs der Integralfunktion hängt nur vom Zuwachs der Fläche ab. Also sind die verschiedenen Integralfunktionen an jeder Stelle x **gleich steil**.

(x ist hier die Stelle von B)

Die Integralfunktion

$$F(x,a) := \int_a^x f(t)\,dt$$



Alle Integralfunktionen

haben dieselbe Form.

An den Extremstellen

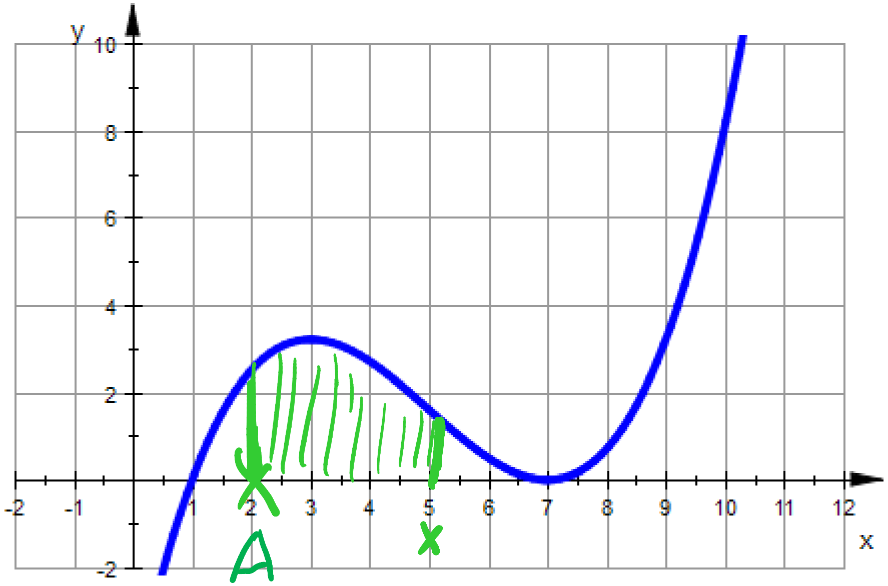
von F hat f eine Nullstelle.

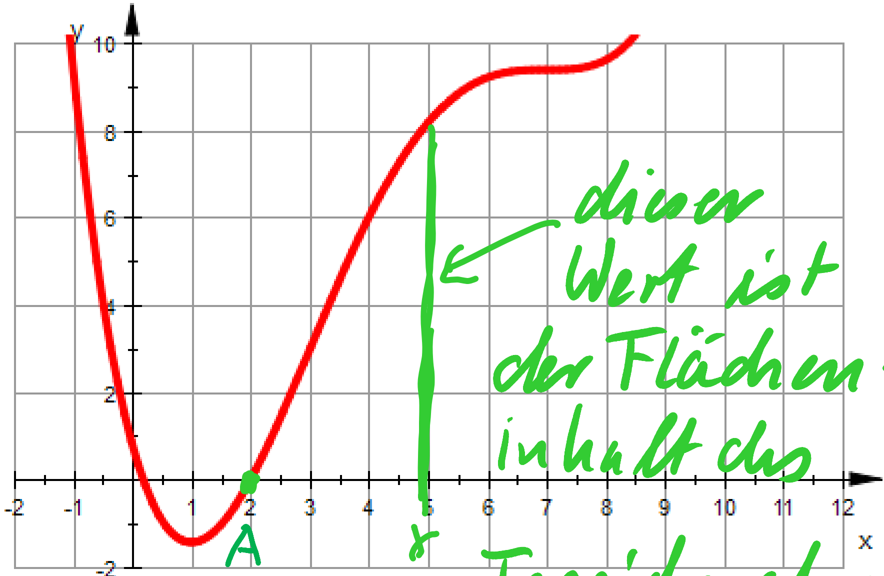
An der Sattelstelle von F

hat f eine Berühr-Nullstelle.

Wo F eine Wendestelle hat, hat f eine Extremstelle.

Nochmal die Teppichabrollfunktion





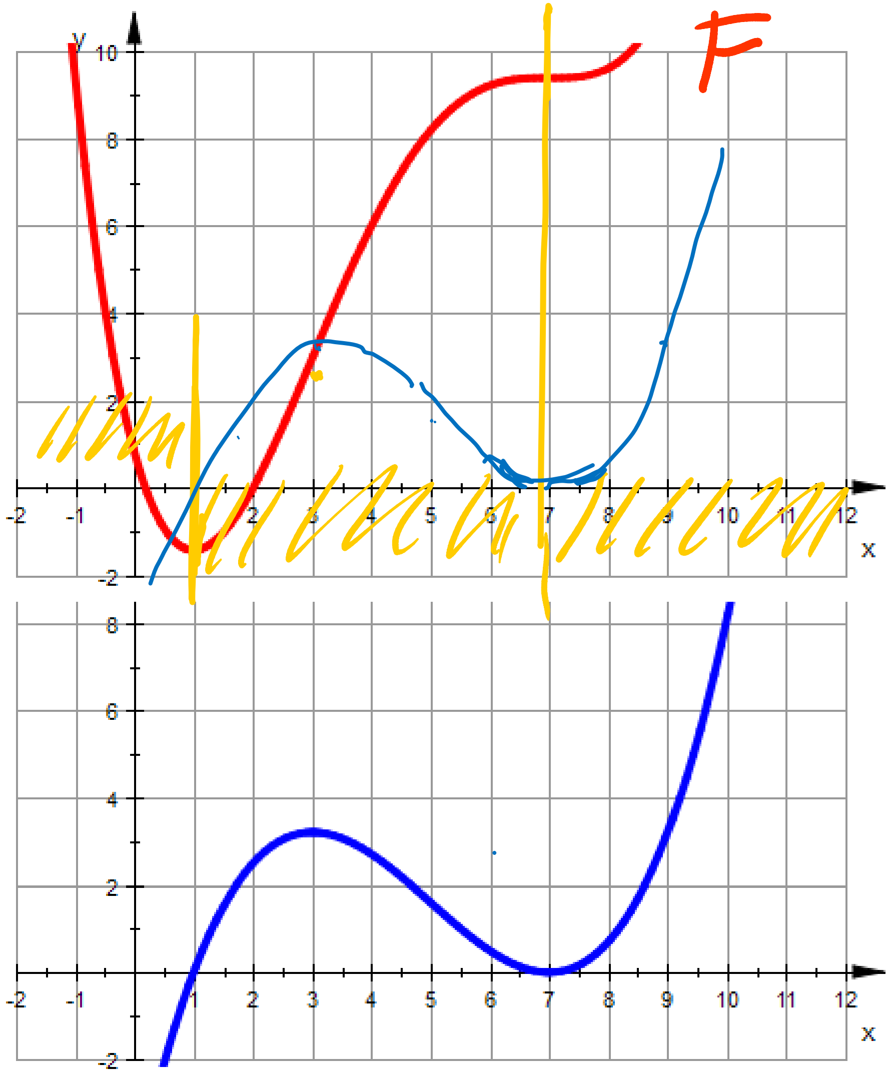
dieser Wert ist der Flächeninhalt des Teppichs, abgerollt bis $x=5$

f als Rand des Teppichs

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$$

Integralfkt zum Start 2

die Intergralfunktion F von f =„Teppichabrollfunktion“



f als Ableitung von F

dasselbe!

f als Randfkt. für den abgerollten Teppich

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\boxed{f(x) = F'(x)}$$

d. h. Alle Integralfunktionen F zu f mit beliebigem Start

haben ihr f auch als Ableitung. Sie heißen daher auch

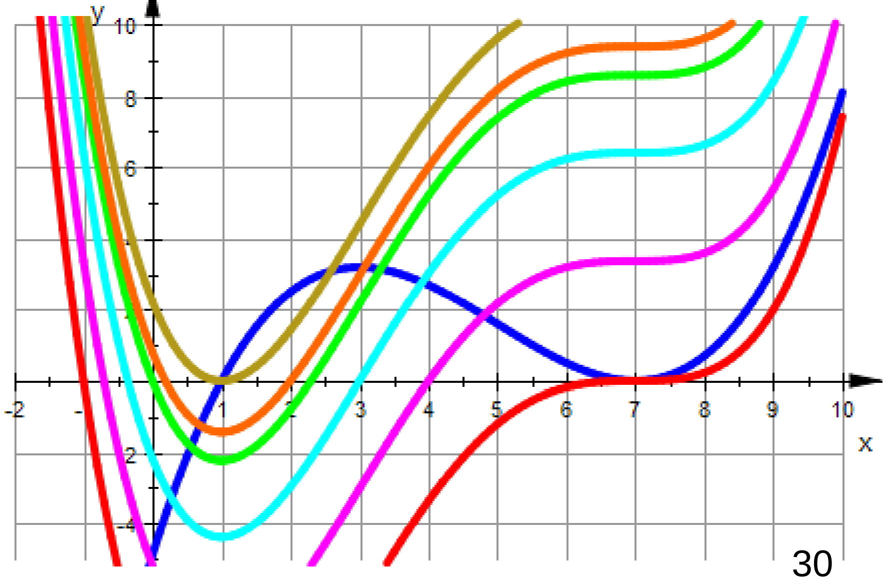
„Stammfunktionen“ von f,

f blau

sie unterscheiden sich nur um eine

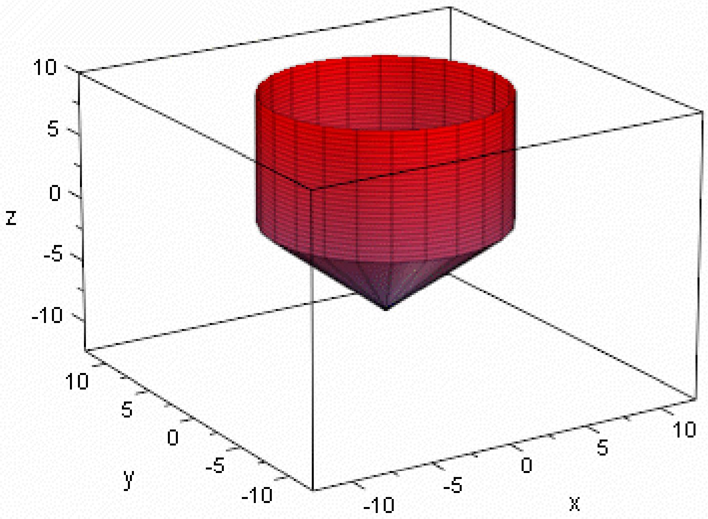
additive Konstante c. Man schreibt:

$$F(x) = \int f(x)\,dx + c$$

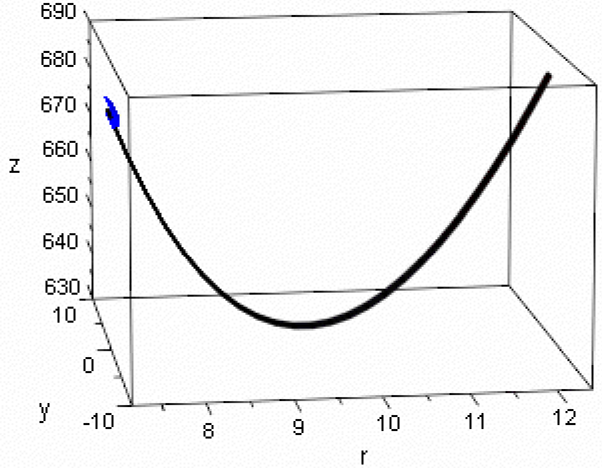


Optimierung als Ziel

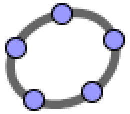
2-Liter-Pokal



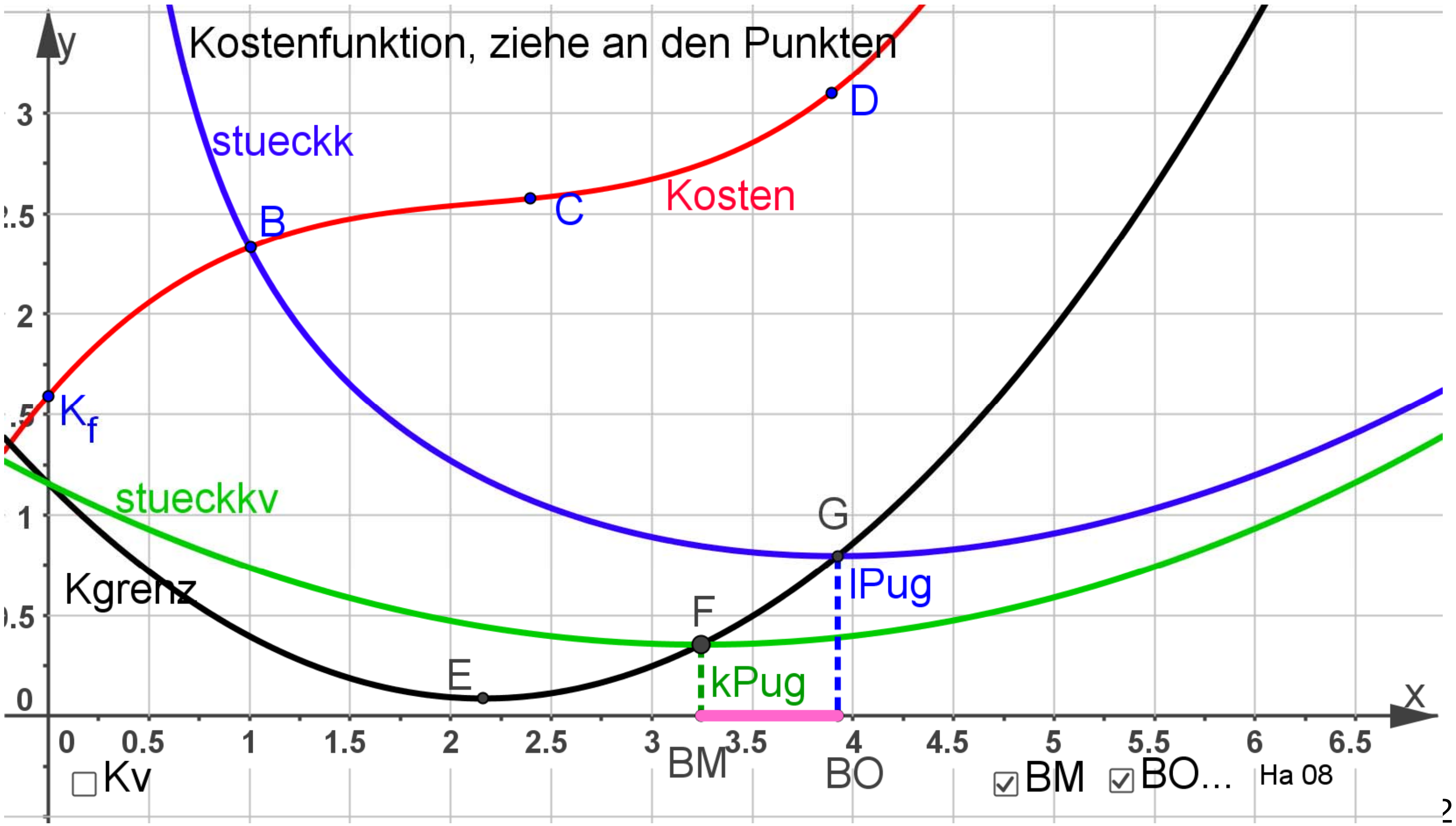
Silberverbrauch



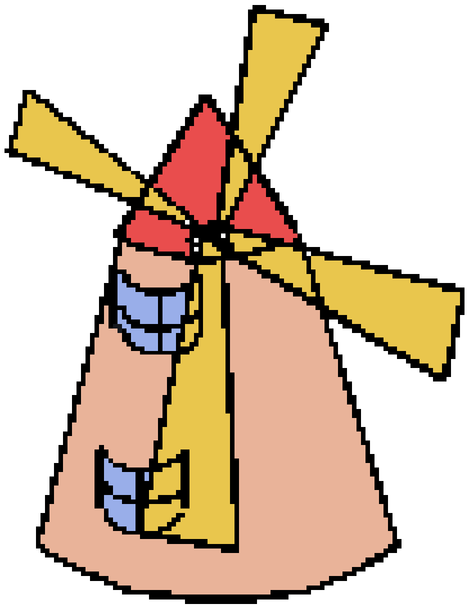
Optimierung als Ziel

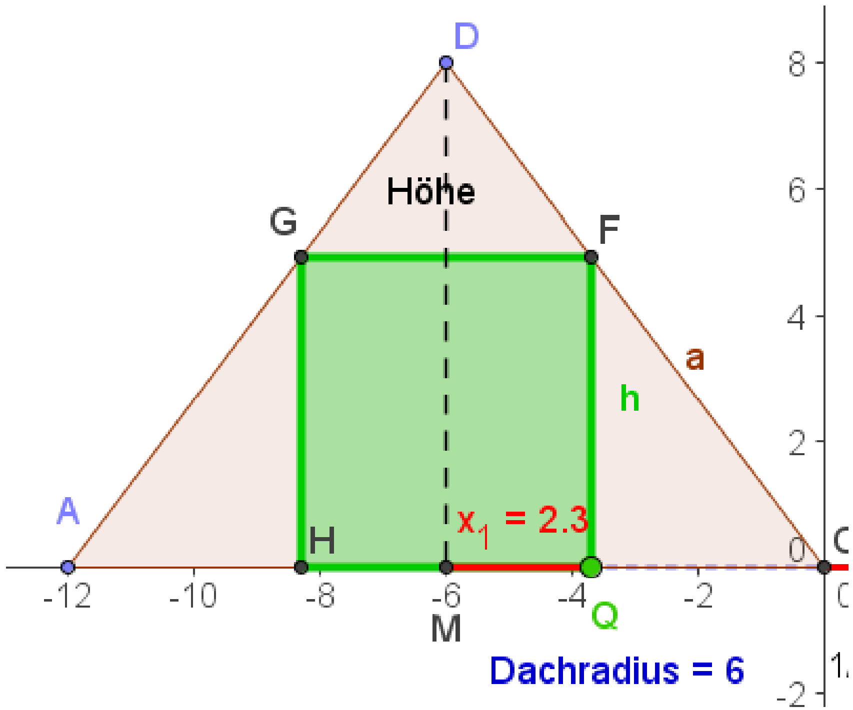


Wirtschaftsfunktionen



Wasser in der Mühle

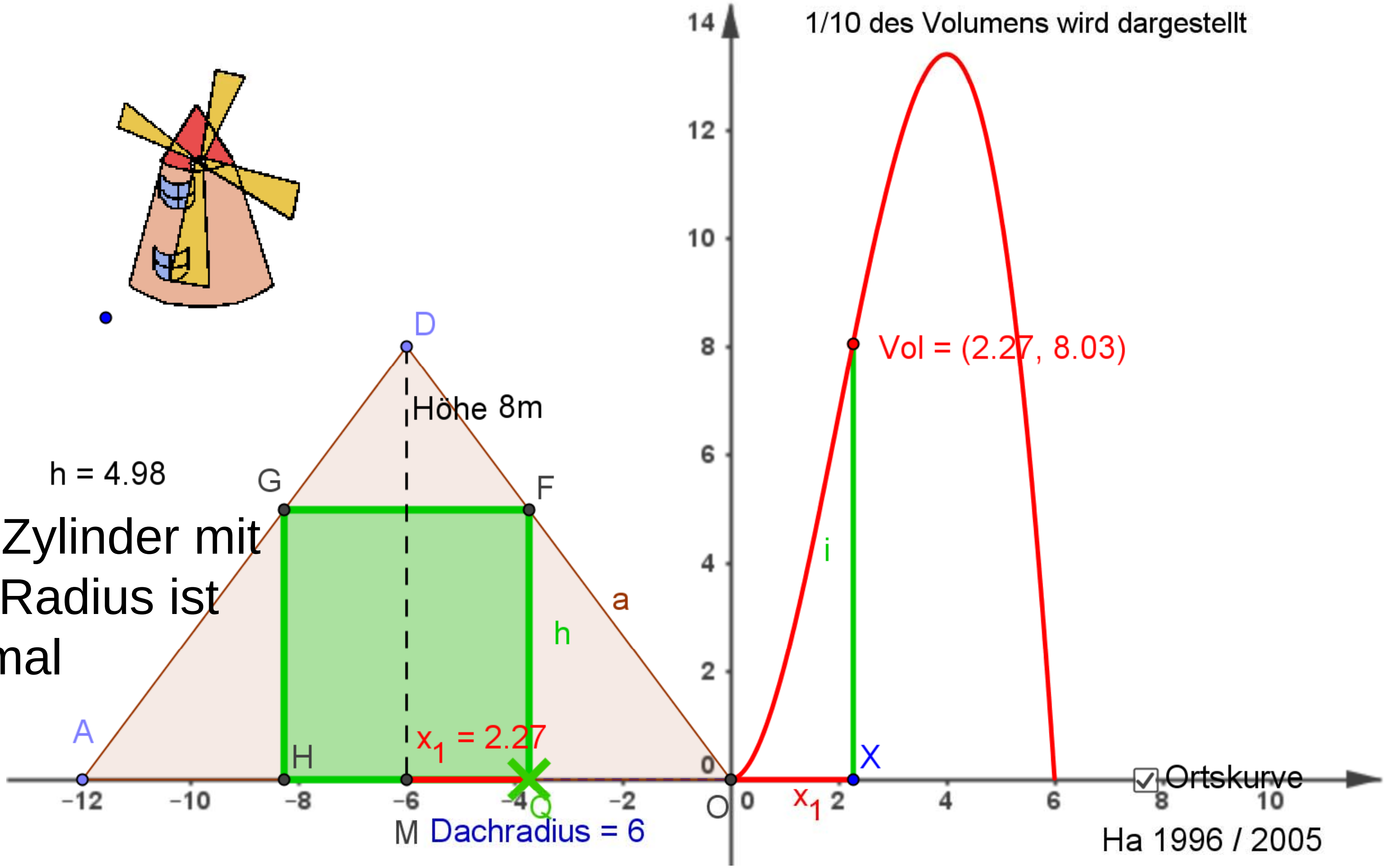




Im kegelförmigen Dach einer Mühle soll ein zylindrischer Wasserbehälter mit möglichst großem Volumen eingebaut werden.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Wasser in der Mühle



Ein Zylinder mit
4 m Radius ist
optimal

Funktionen Optimum 3 D