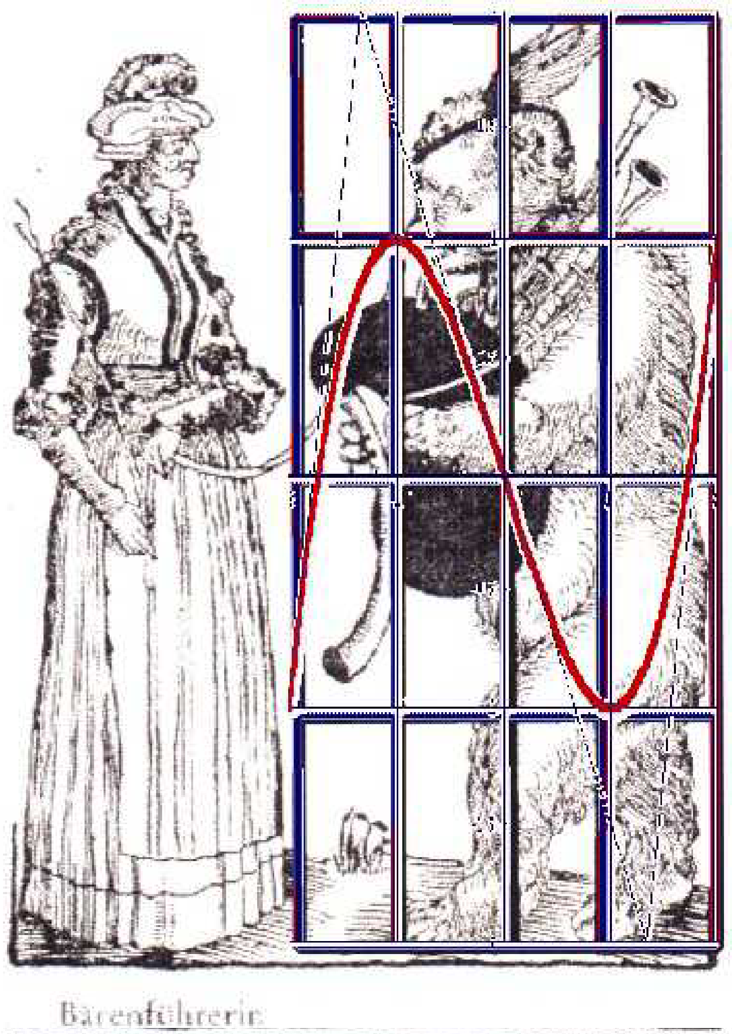
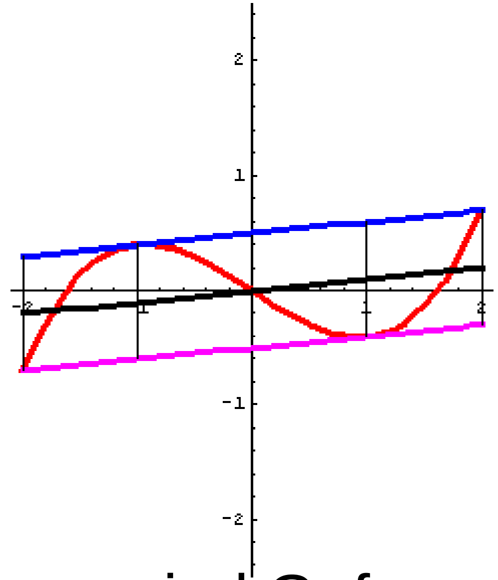
Polynome und mehrfache Nullstellen



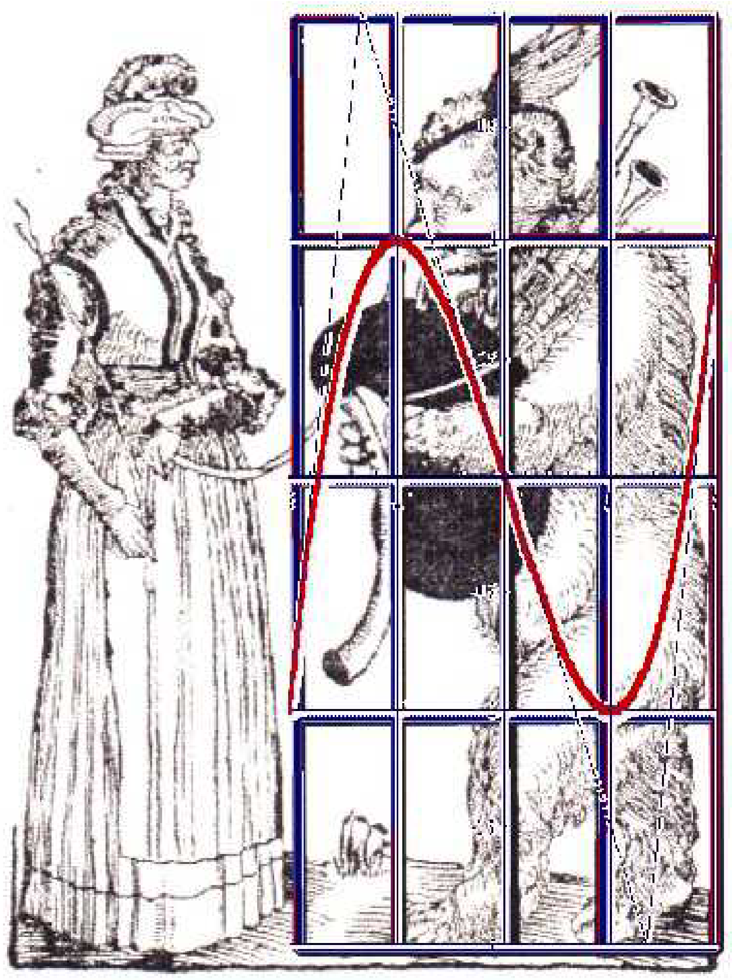


Polynome sind Gefangene ihrer leicht durchschaubaren Eigenschaften.

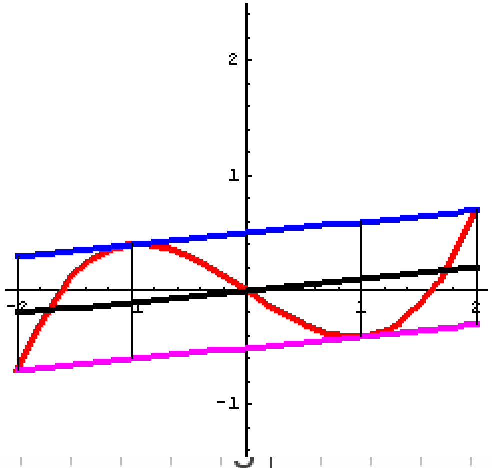
Stichwort: Polynome
im Affenkasten

www.mathematik-verstehen.de

Polynome und mehrfache Nullstellen

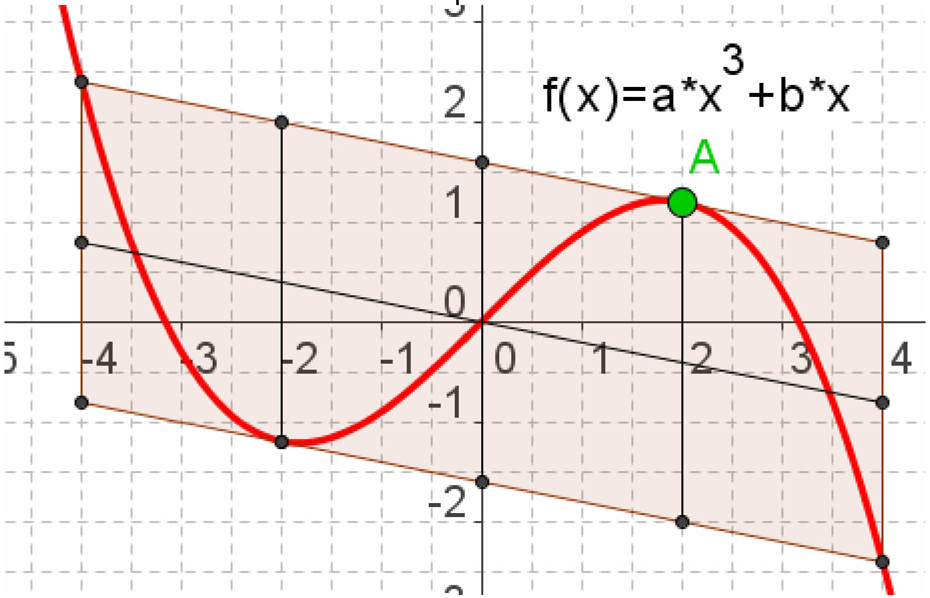


Bärenführerin



gerade

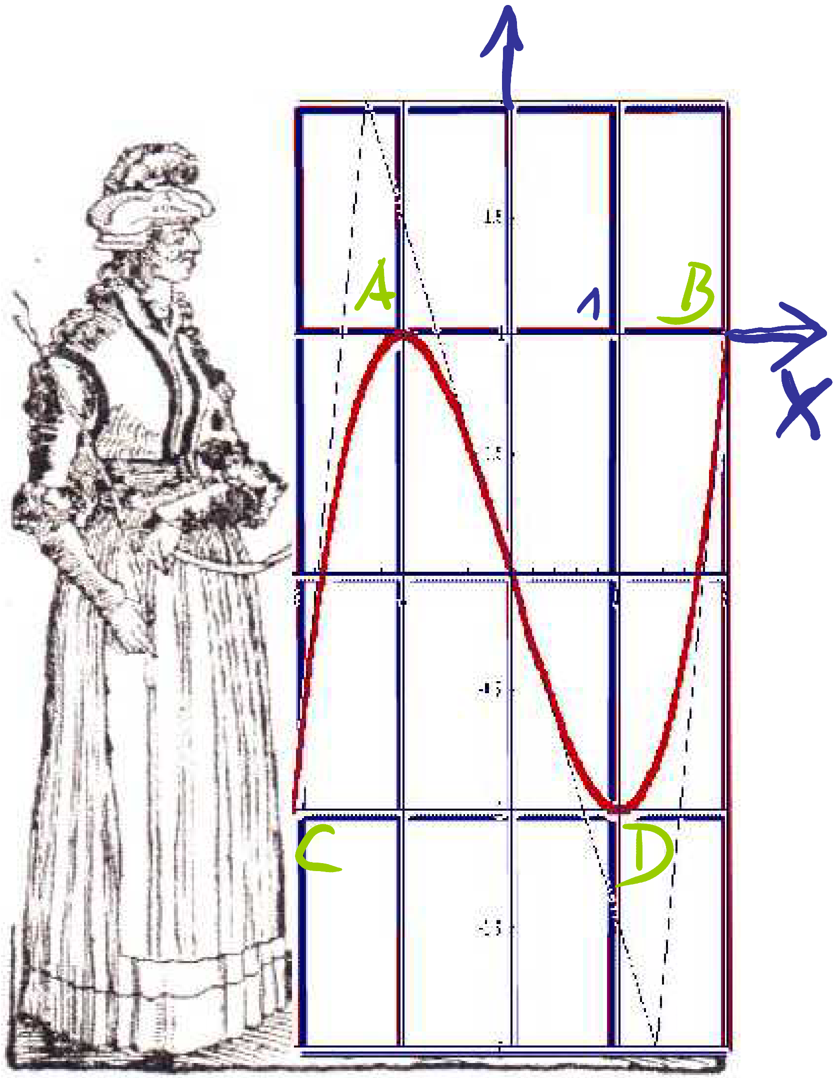
schräg



www.mathematik-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

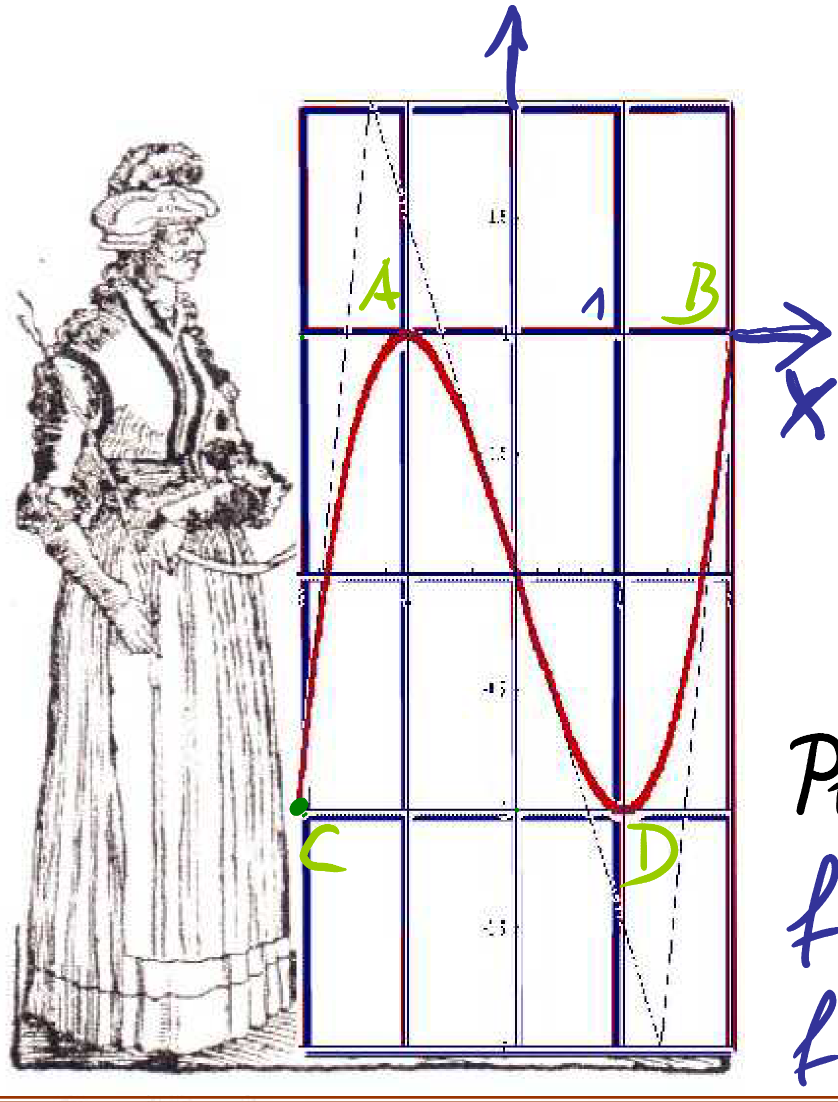
Nullstellen $\Longleftrightarrow$ Linearfaktoren



$$f(x) = t\,(x+1)^2\,\overbrace{(x-2)}^{\text{Lin.}}$$

doppelte Nullstelle	einfache Nullstelle
x= -1	x= 2
A	B

Nullstellen $\Leftrightarrow$ Linearfaktoren



$$f(x) = (x+1)^2 (x-2)$$

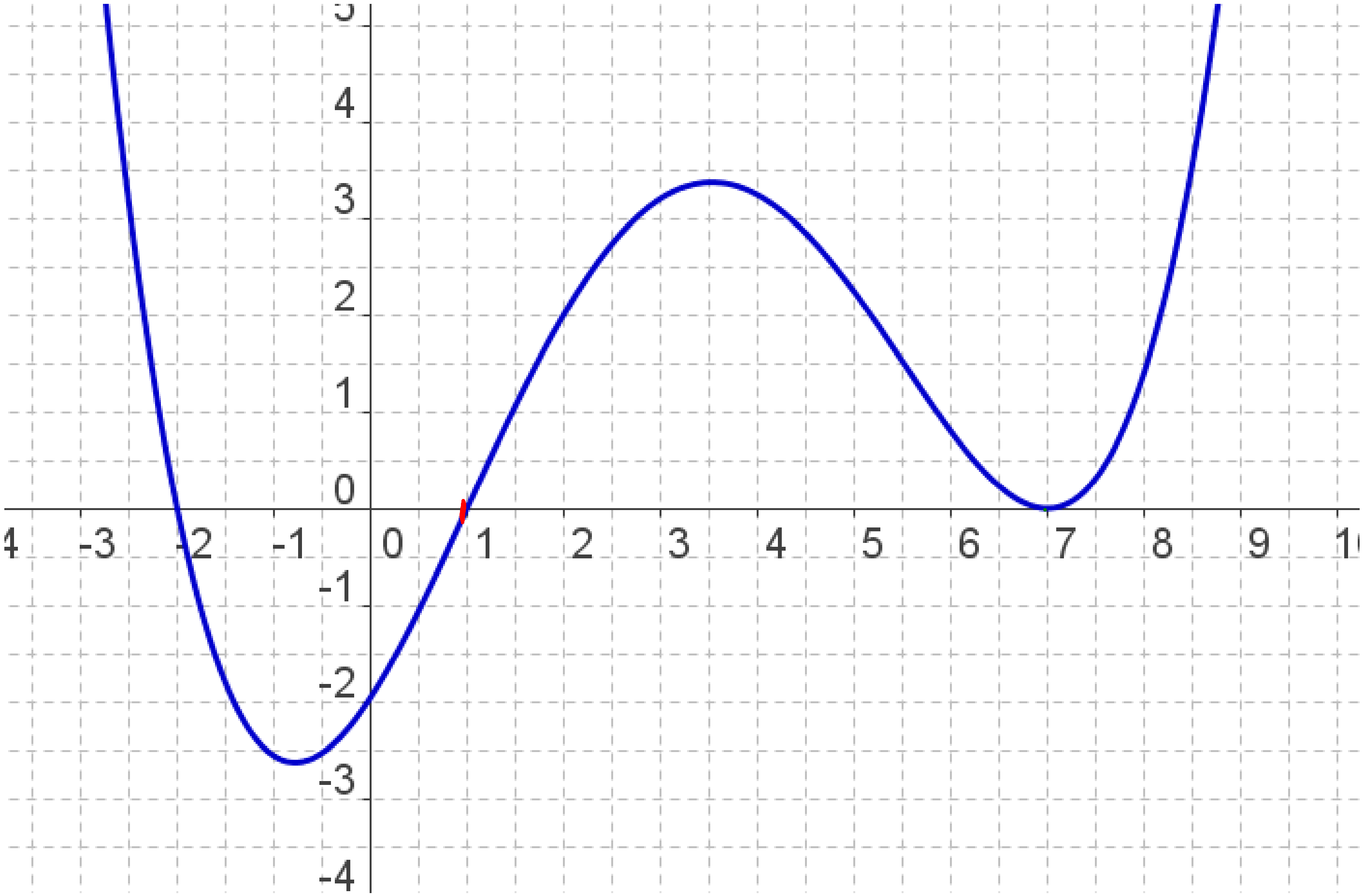
doppelte Nullstelle	einfache Nullstelle
x= -1	x= 2
A	B

Proben

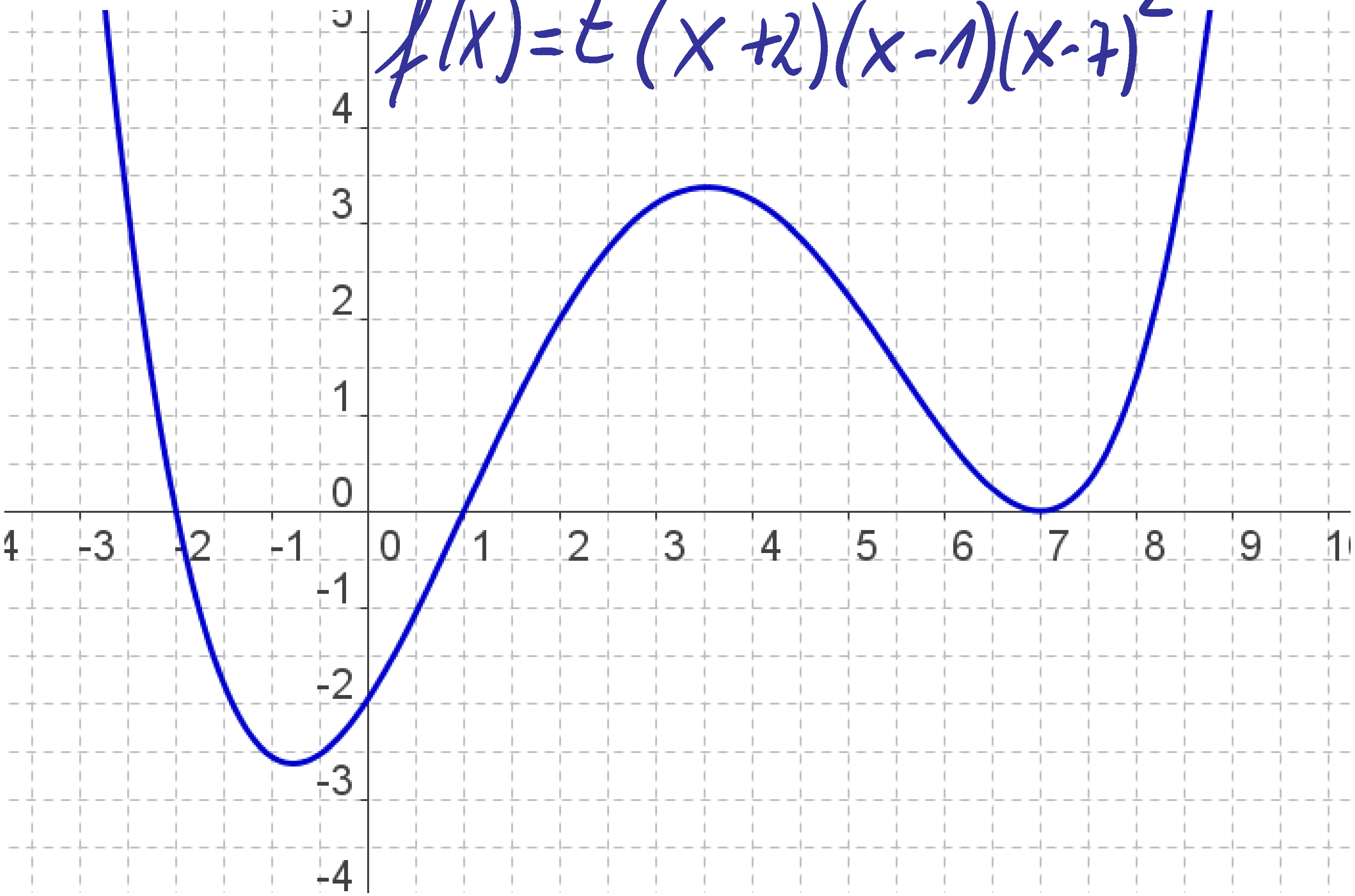
$f(-2) = (-2+1)^2(-2-2) = -4$ " C

$f(1) = (1+1)^2 (1-2) = -4$ D

Welche Gleichung kann dieses Polynom haben?



Welche Gleichung kann dieses Polynom haben?



$$f(x) = t\,(x+2)(x-1)(x-7)^2$$

Diese

Funktion

Vieta

Vieta, mehr

Folie 11

Was ist eigentlich ein Polynom?

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Ein Polynom ist eine Summe von Potenzfunktionen.

Der höchste Exponent, der vorkommt, heißt Grad des Polynoms.

- Polynome 1. Grades sind die Geraden
- Polynome 2. Grades sind die Parabeln
- Polynome 3. Grades haben immer eine symmetrische s-Form.
- Polynome 4. Grades haben höchstens 3 Extrema.
- Je höher der Grad, desto vielfältigere Formen sind möglich.

Polynome und ihre Linearfaktoren

Jede reelle Nullstelle a
erzeugt einen Linearfaktor. $(x-a)$

$$f(x) = (x-a)\, q(x)$$

Wenn das Restpolynom auch noch die Nullstelle a
enthält, kann man den Linearfaktor mehrfach „herausziehen“.

$$f(x) = (x-a)^k\, p(x) \quad mit \quad p(a) \neq 0$$

Geht das maximal k-mal, dann heißt a k-fache Nullstelle,
oder „Nullstelle der Vielfachheit k“

Polynome und ihre Linearfaktoren

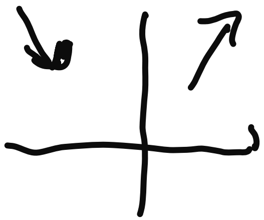
$$f(x) = (x-a)^k \; p(x) \quad mit \quad p(a) \neq 0$$

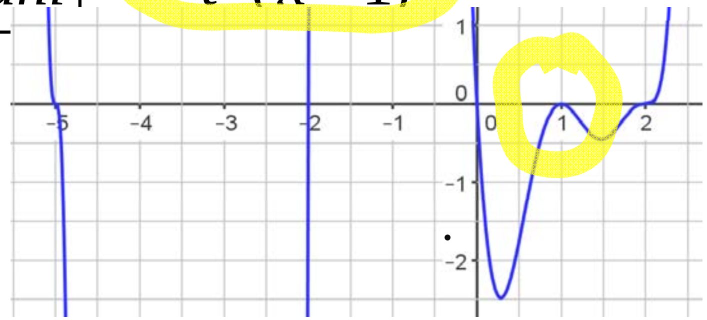
In der Nähe eine k-fachen Nullstelle verhält sich das Polynom wie sich die k-Potenzfunktion im Ursprung verhält.

$$f(x) = (x+5)^3 (x+2) \; x \; (x-1)^2 \, (x-2)^3$$

$$f(nahe\ 1) = \boxed{pos.Zahl} \bullet (x-1)^2 \bullet \boxed{neg.Zahl} \approx -t \cdot (x-1)^2$$

Grad 10 Gesamtverlauf





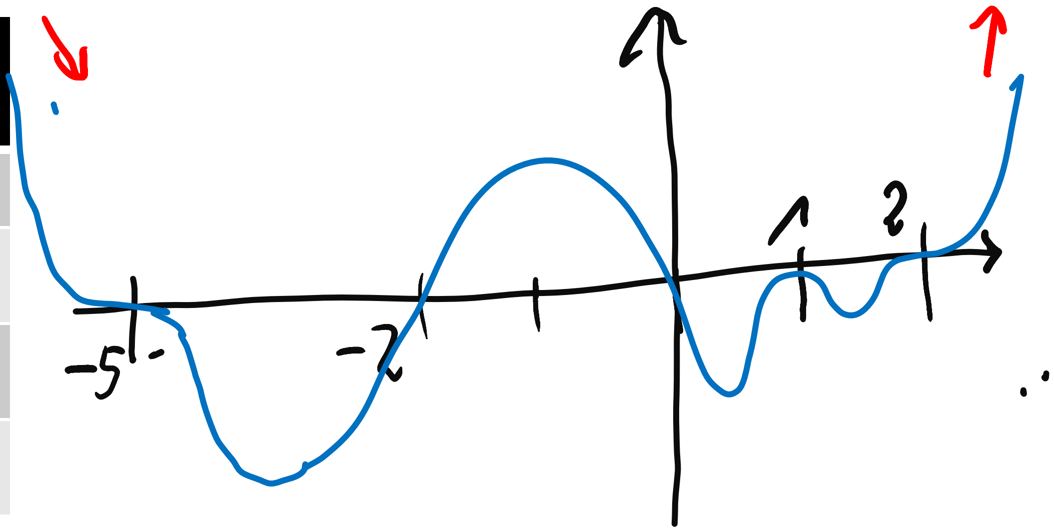
Ein Polynom n-ten Grades hat höchsten n Nullstellen, mit ihrer Vielfachheit gezählt. Fundamentalsatz der Algebra (reell)

Polynome und ihre Linearfaktoren

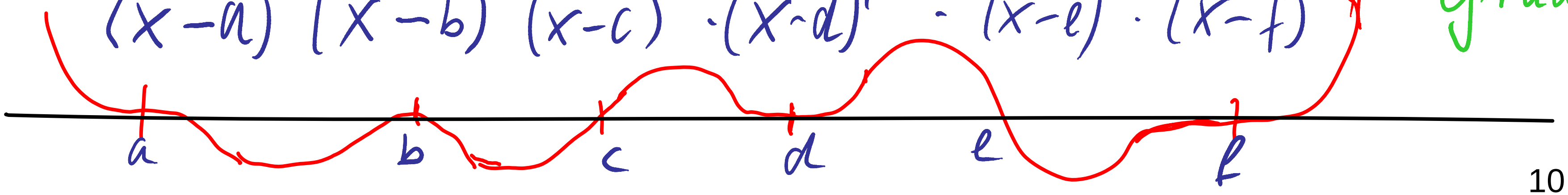
$$f(x) = (x+5)^3 (x+2)\ x\ (x-1)^2 (x-2)^3$$

Qualitativer Graph eines durch Linearfaktoren gegeben Polynoms

Vorzei-chen	Grad	Ges. Verlauf
+	gerade	↘ ↗
−	gerade	↗ ↘
+	ungerade	↗ ↗
−	ungerade	↘ ↘



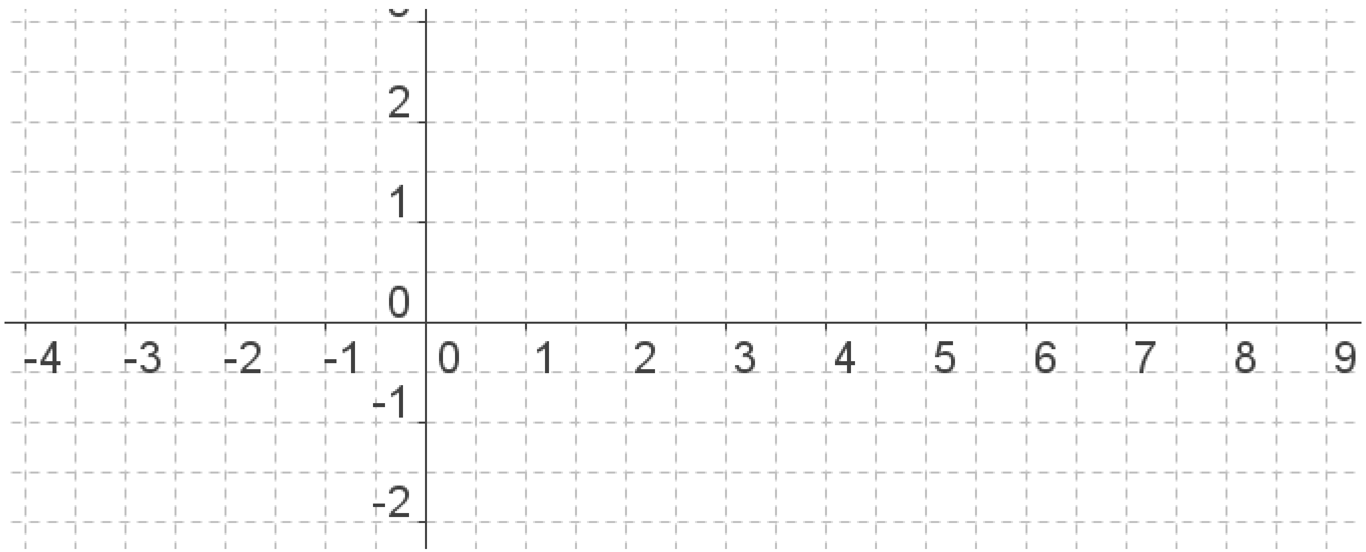
$(x-a)^3 (x-b)^2 (x-c) \cdot (x-d)^4 \cdot (x-e) \cdot (x-f)^5$ Grad?



Übung 2 mit Polynomen

Polynome
aus Linearfaktoren Zeichnen

$$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)(x-7)^2$$

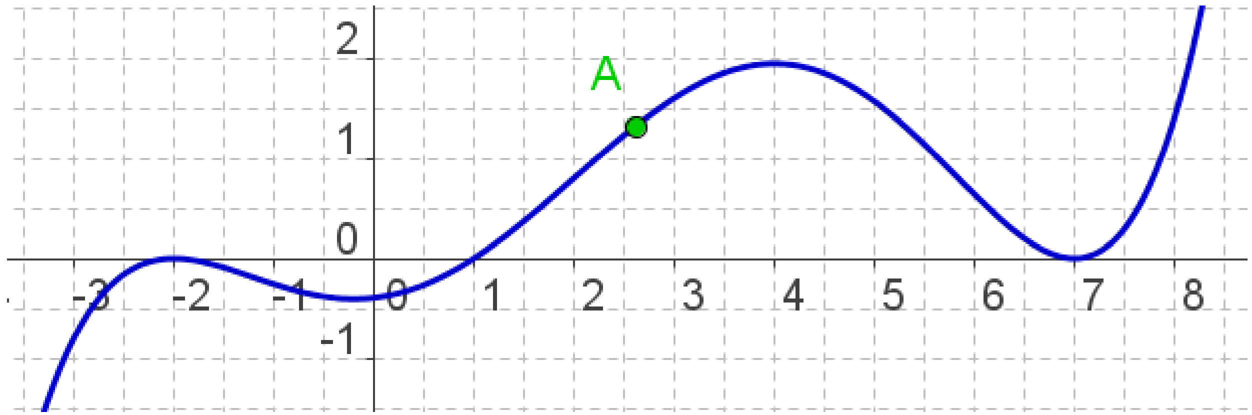


Übung 2 mit Polynomen

Polynome
aus Linearfaktoren Zeichnen

$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)(x-7)^2$

Grad 5

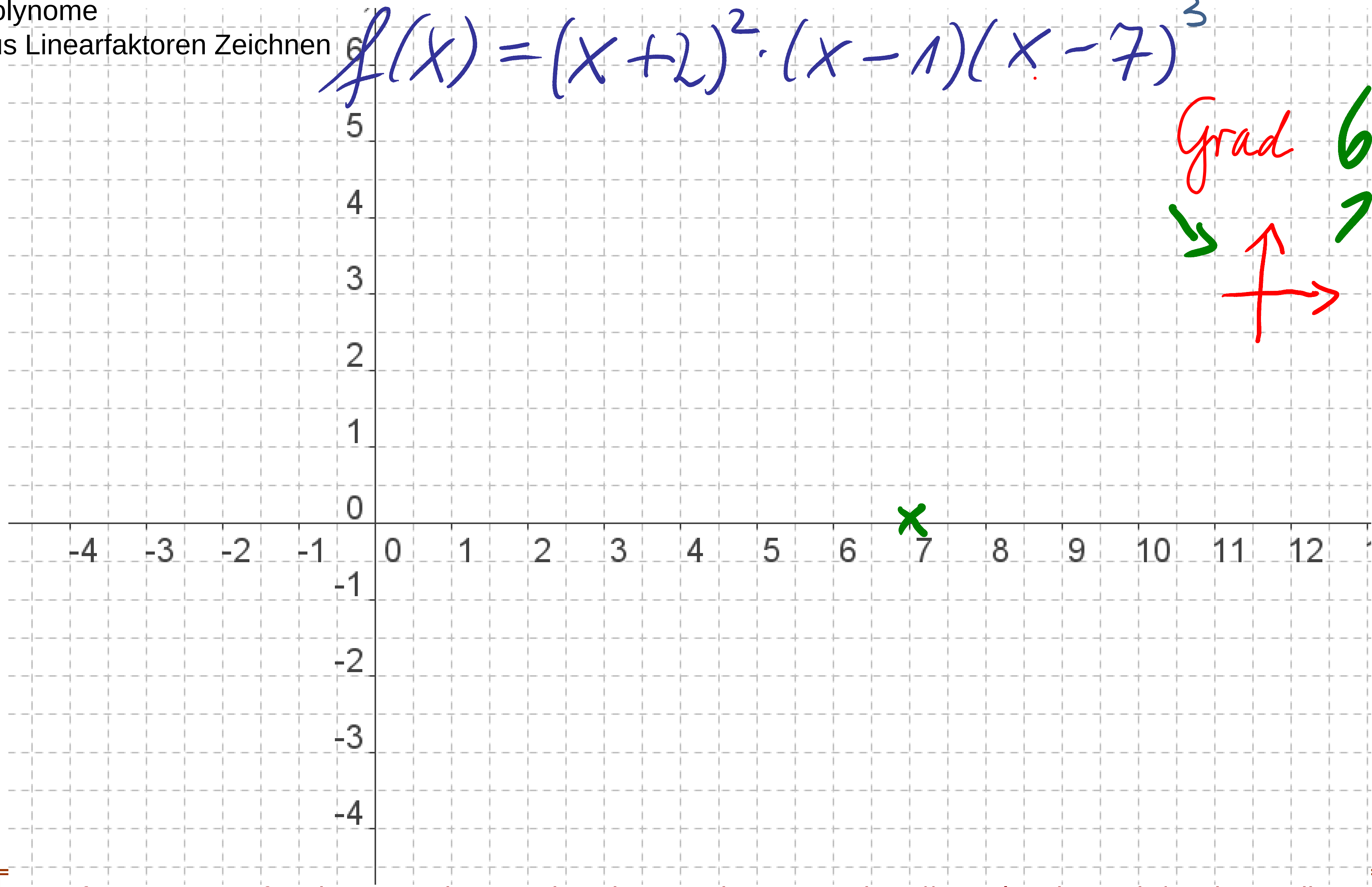


Übung 3 mit Polynomen

Polynome
aus Linearfaktoren Zeichnen

$$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)(x-7)^3$$

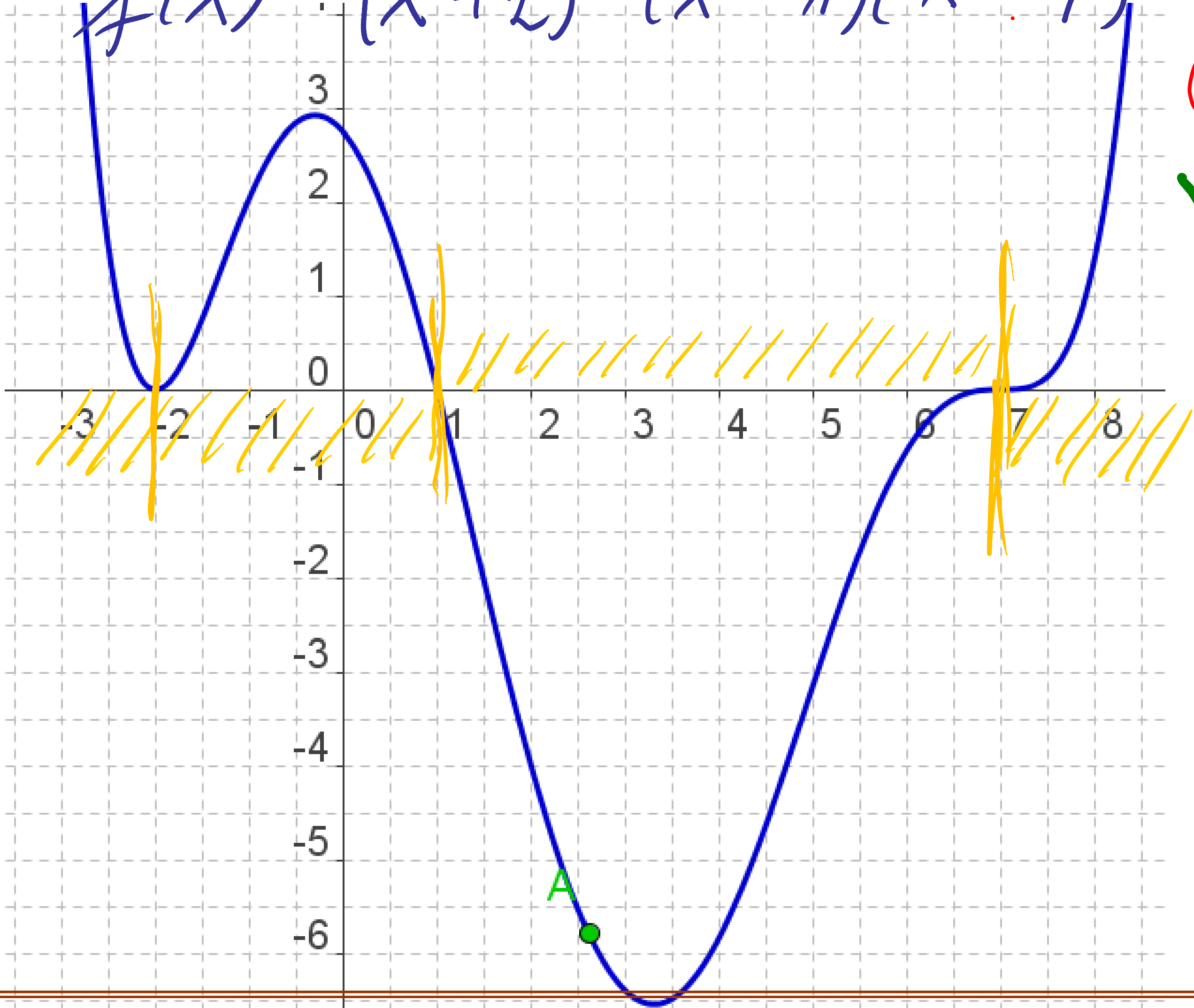
Grad 6



Übung 3 mit Polynomen

Polynome
aus Linearfaktoren Zeichnen

$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)(x-7)^3$



Grad 6 7

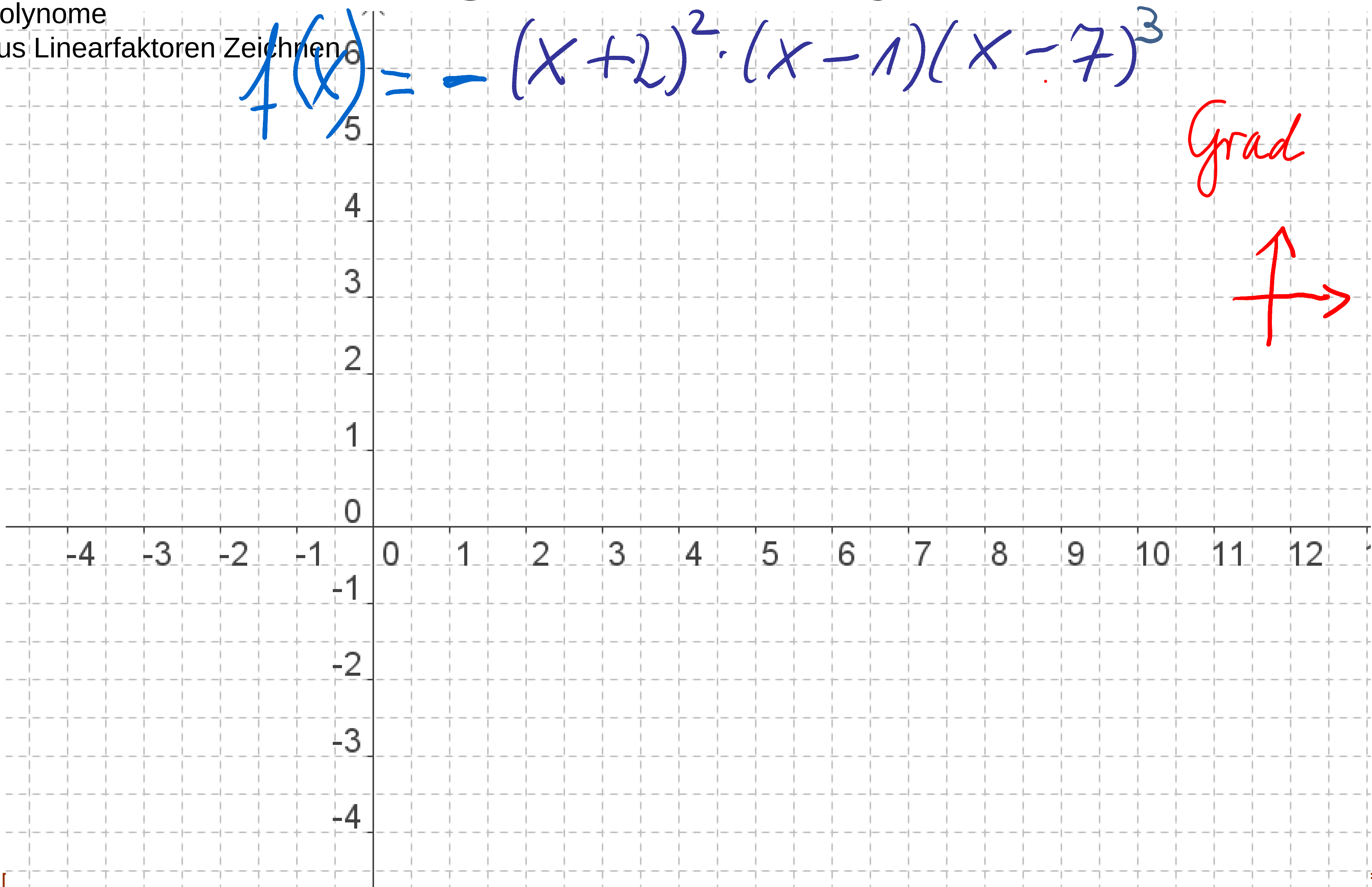
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Übung 4 mit Polynomen

Polynome
aus Linearfaktoren Zeichnen

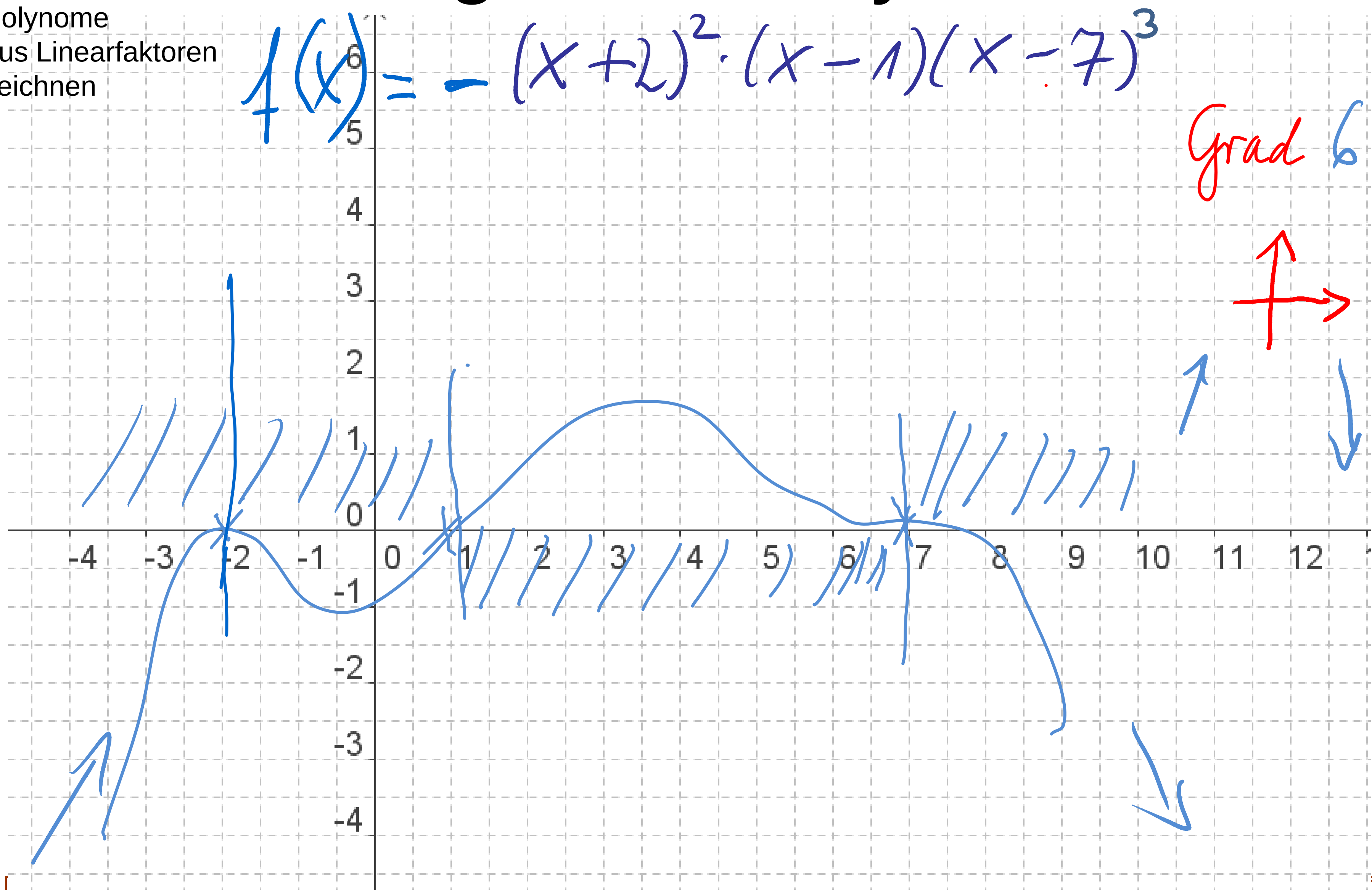
$$f(x) = -(x+2)^2 \cdot (x-1)(x-7)^3$$

Grad



Übung 4 mit Polynomen

Polynome
aus Linearfaktoren
zeichnen



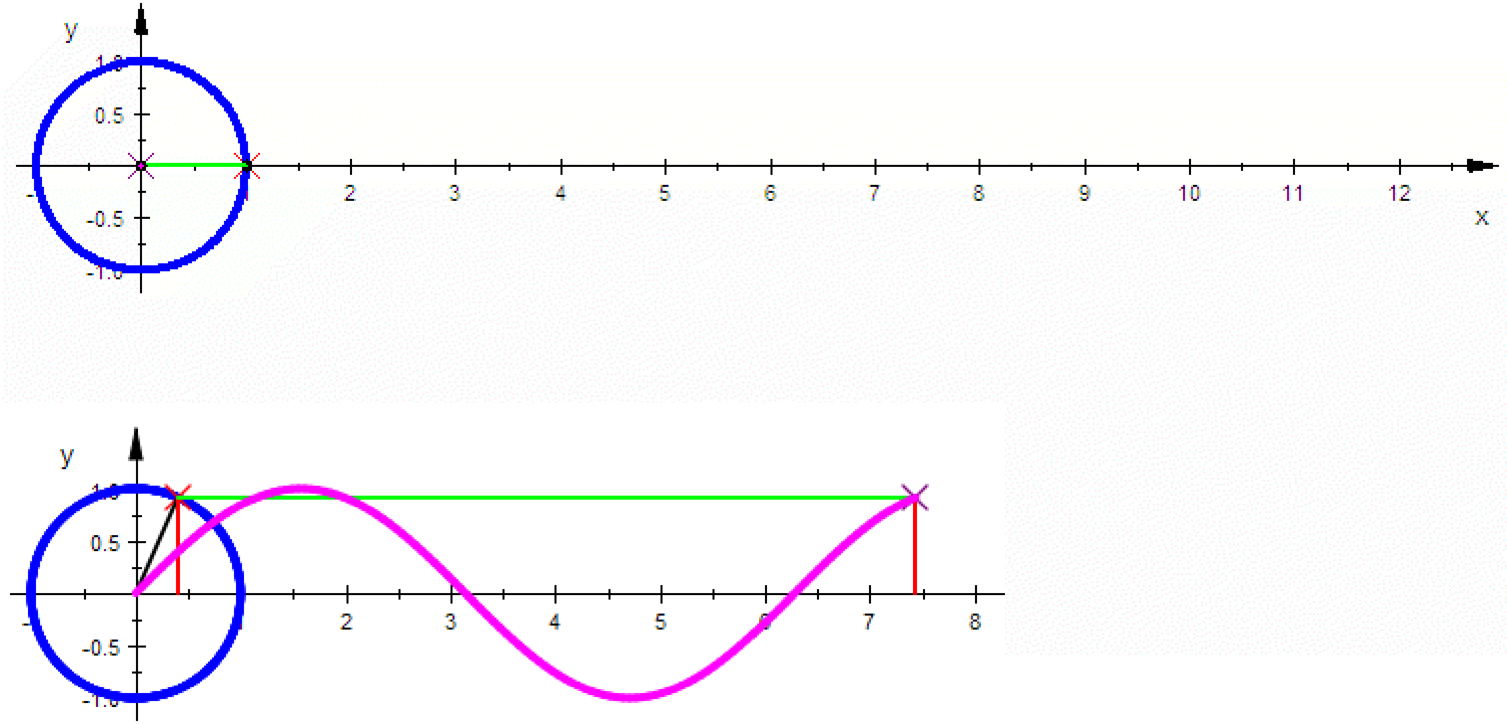
Funktionen als zentrales Werkzeug

- Potenzfunktionen
- Polynome
- **Trigonometrische Funktionen**
- **Exponentialfunktionen**
- **Davon so manche Umkehrfunktionen**
  - Wurzelfunktionen
  - Arkusfunktionen
  - **Logarithmusfunktionen**

Das war‘s dann aber auch

Und das noch koppeln mit $+ \quad - \quad \cdot \quad / \quad \wedge$ und Verkettung.

Funktionen als zentrales Werkzeug



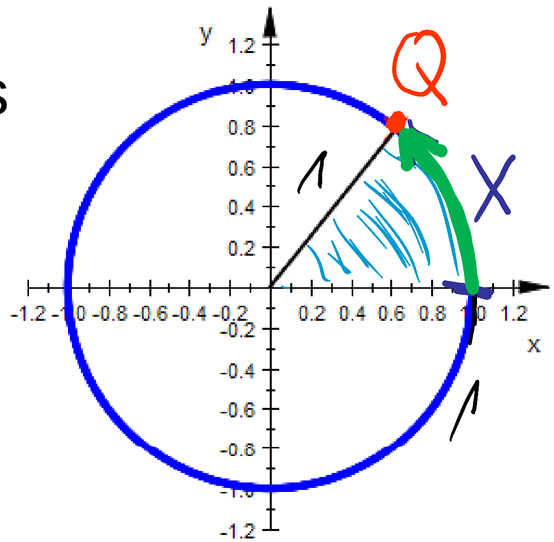
Sinusfunktion

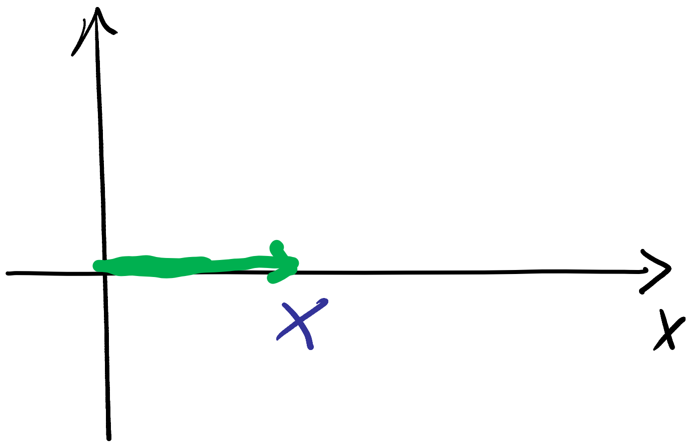
Die Winkel-Funktionen

Der Punkt Q läuft im Einheitskreis vom Start (1/0).
(mathematisch positiv = gegen die Uhr)

Den von Q zurückgelegten Weg x nennt man auch
„das Bogenmaß des Winkels“, um den sich Q gedreht hat.
Kurz: x ist der Winkel im Bogenmaß

Einheitskreis





x wird Argument einer Funktion

Die Sinus-Funktion

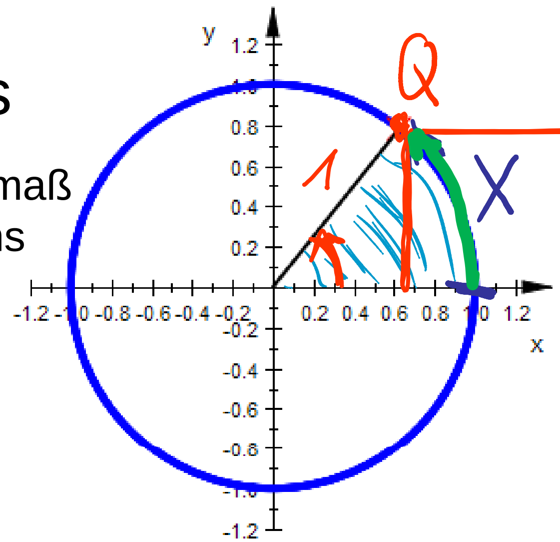
Dem Winkel x wird nun die Ordinate von Q zugeordnet.

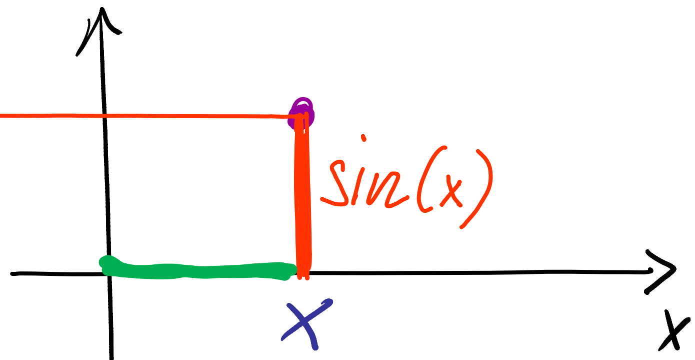
Die Funktion, die das leistet, heißt Sinus-Funktion.

$sin: x \longrightarrow sin(x)$

Einheitskreis

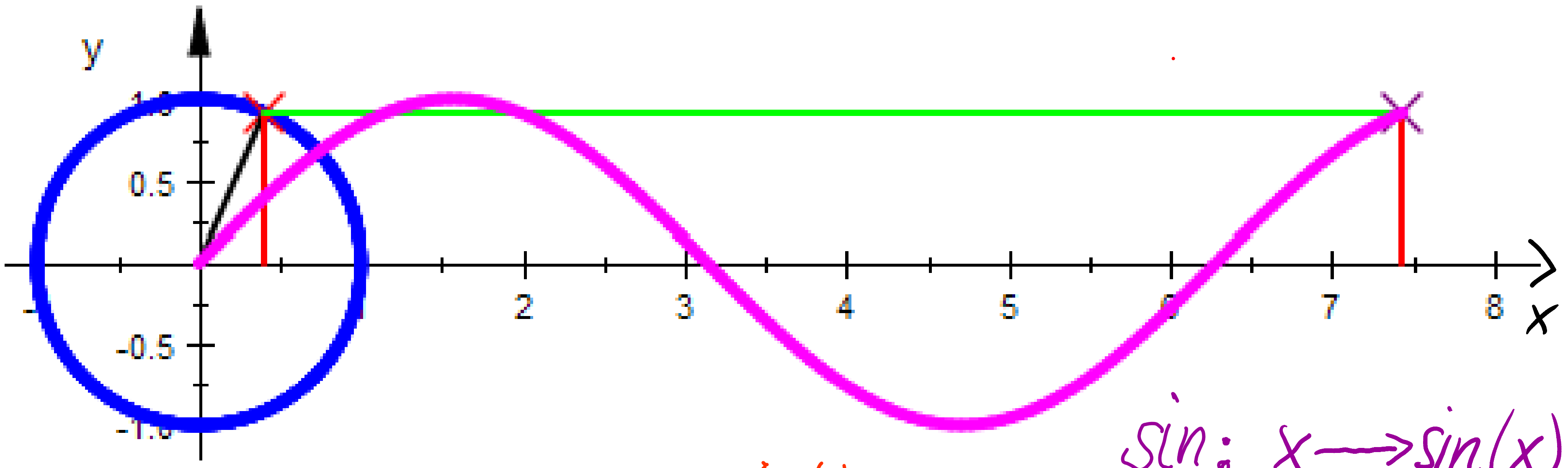
x = Winkel im Bogenmaß
= Länge des Bogens
im Einheitskreis





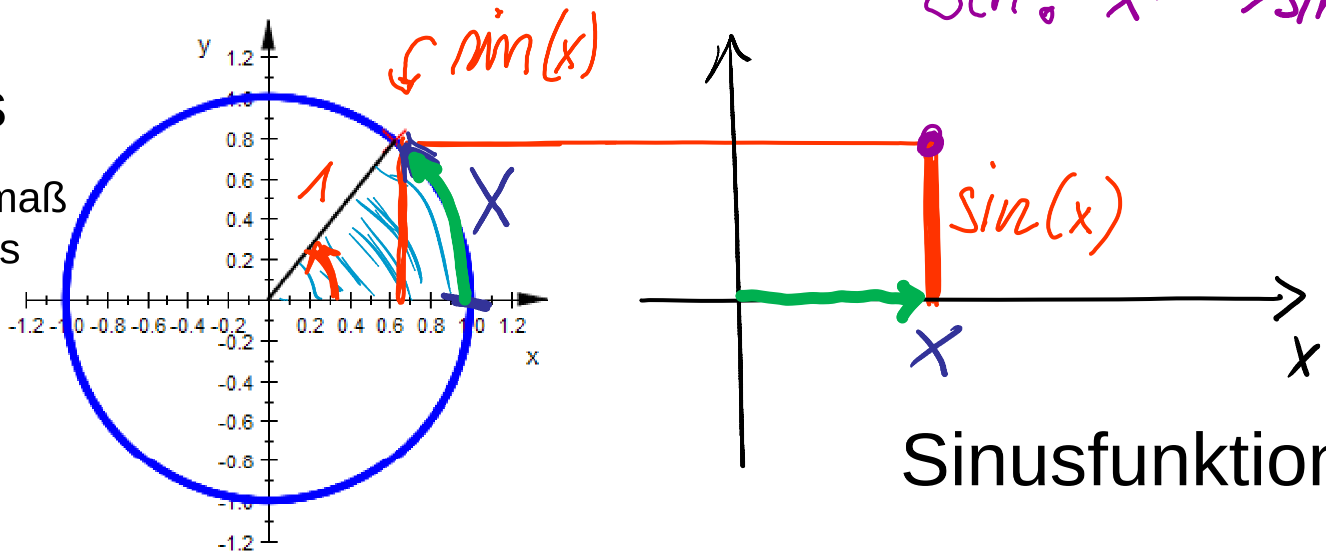
Sinusfunktion

Die Sinus-Funktion



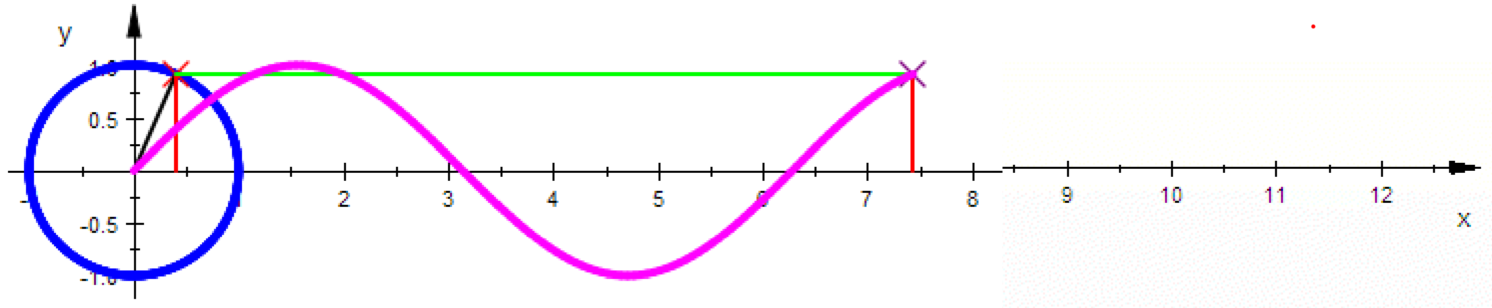
Einheitskreis

x = Winkel im Bogenmaß
= Länge des Bogens
im Einheitskreis

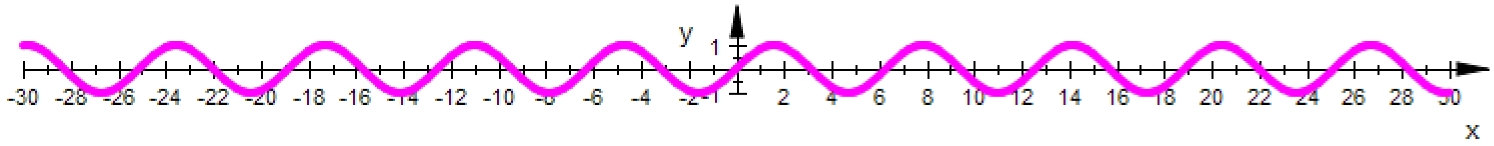


Sinusfunktion

Eigenschaften der Sinus-Funktion



- Die Sinus-Funktion ist periodisch.
- Die Periode ist 2π .
- Die Sinuswerte liegen zwischen -1 und + 1.
- Die Sinusbögen sind symmetrisch.
- Die Sinuskurve ist punktsymmetrisch zum Ursprung



Die Sinus-Funktion

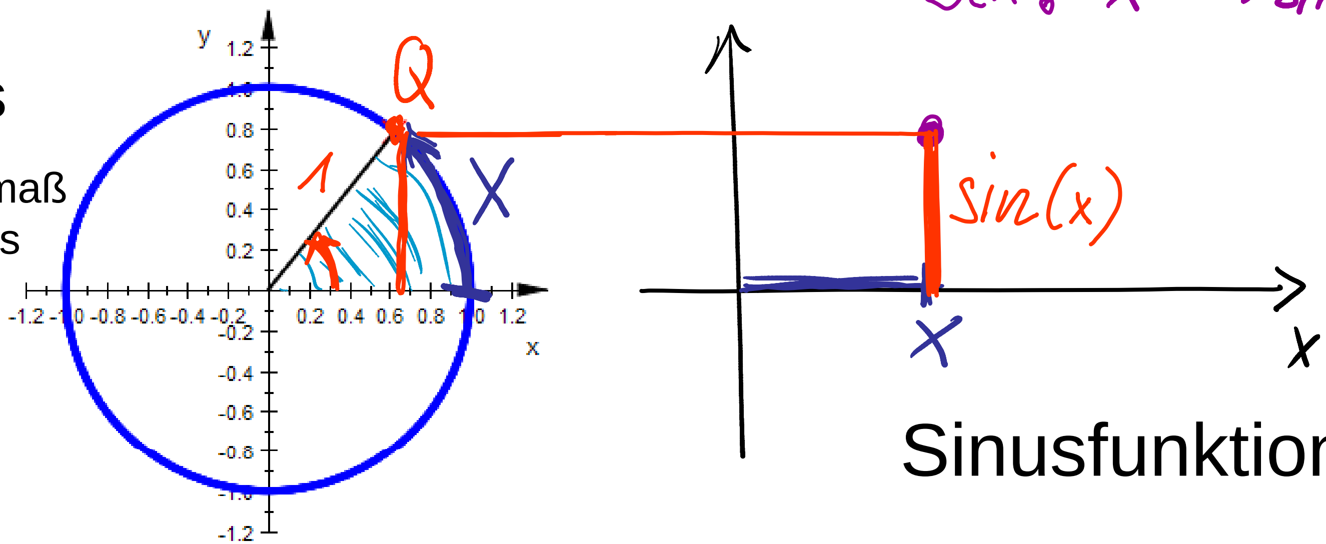
Dem Winkel x wird nun die Ordinate von Q zugeordnet.

Die Funktion, die das leistet, heißt Sinus-Funktion.

sin: x ⟶ sin(x)

Einheitskreis

x = Winkel im Bogenmaß
= Länge des Bogens
im Einheitskreis



Sinusfunktion

Die Kosinus-Funktion

Dem Winkel x wird nun die ~~Ordinate~~ Abszisse von Q zugeordnet.

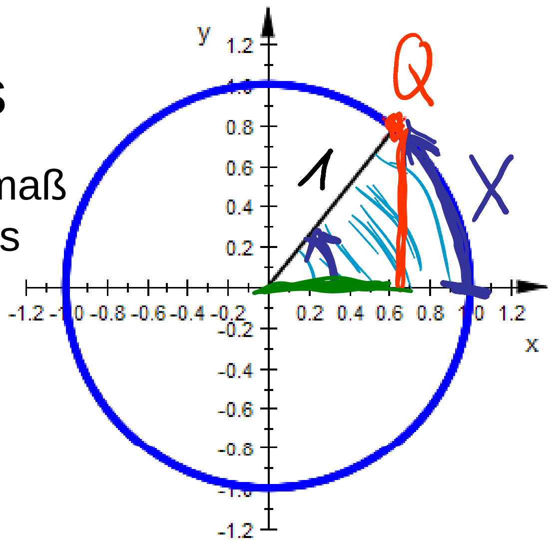
Die Funktion, die das leistet, heißt ~~Sinus~~ Kosinus-Funktion.

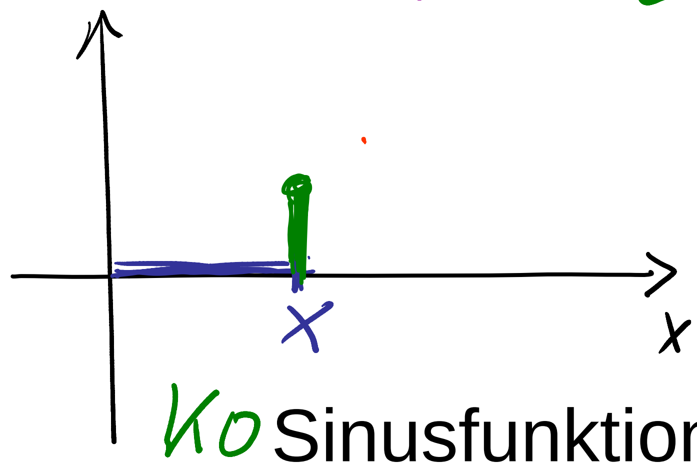
$\cos: x \longrightarrow \cos(x)$

Einheitskreis

x = Winkel im Bogenmaß
= Länge des Bogens
im Einheitskreis

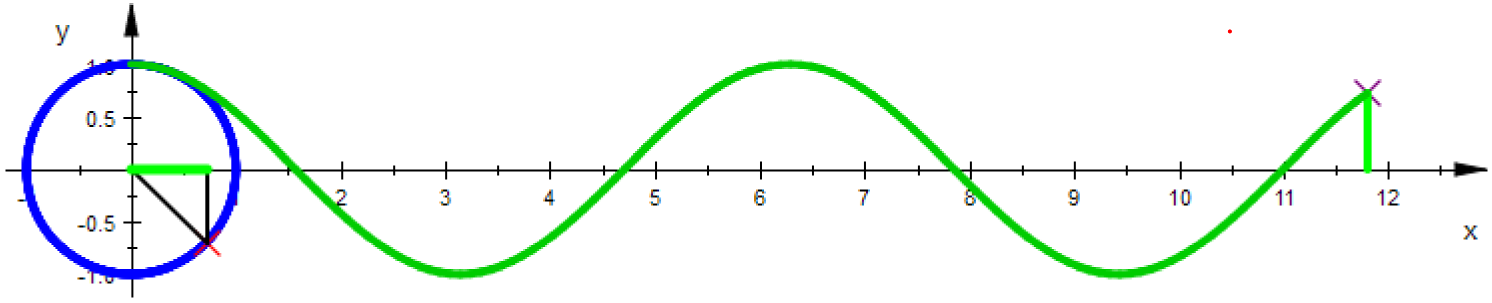
Tangens Kosinus



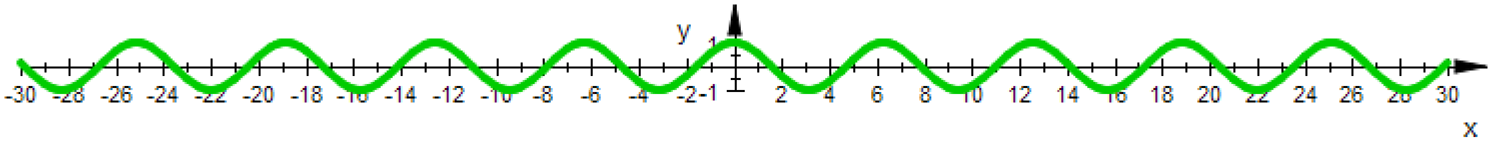


Ko Sinusfunktion

Eigenschaften der Kosinus-Funktion

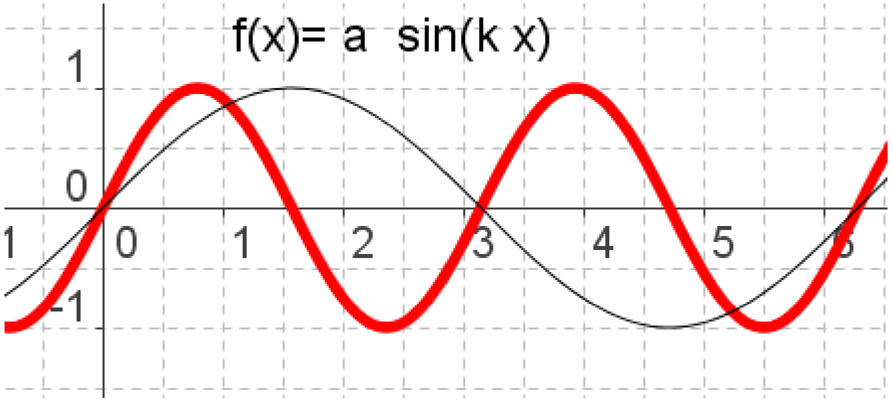


- Die Kosinus-Funktion ist periodisch.
- Die Periode ist 2π .
- Die Kosinuswerte liegen zwischen -1 und + 1.
- Die Kosinusbögen sind symmetrisch.
- Die Kosinuskurve ist symmetrisch zur y-Achse

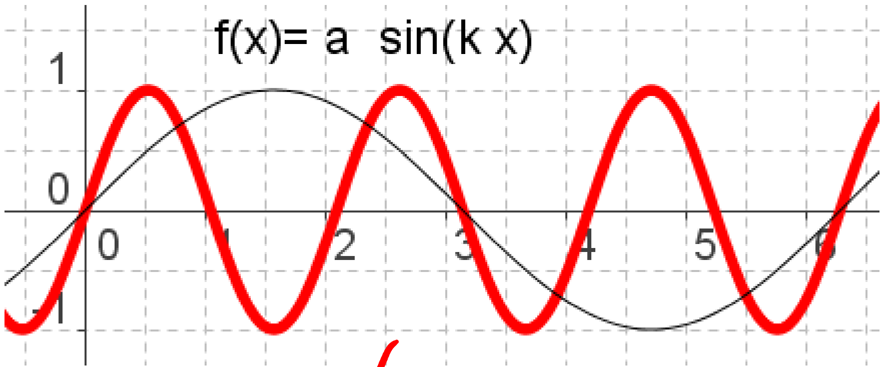


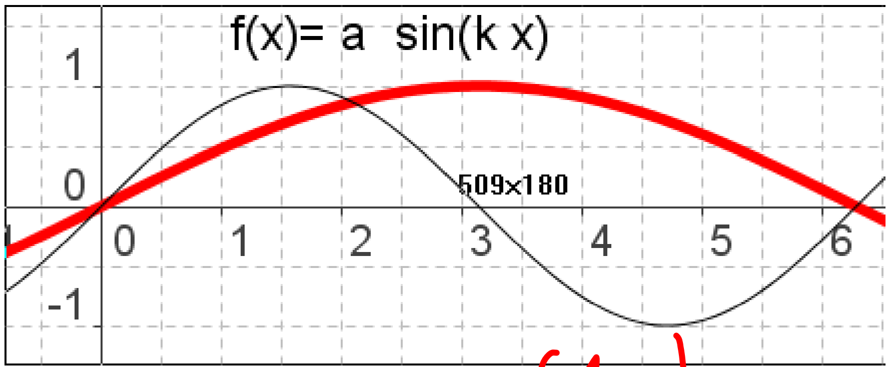
Funktionen strecken und stauchen

$y = \sin(2x)$



Ein Faktor direkt beim x sorgt für waagerechtes Strecken und Stauchen.



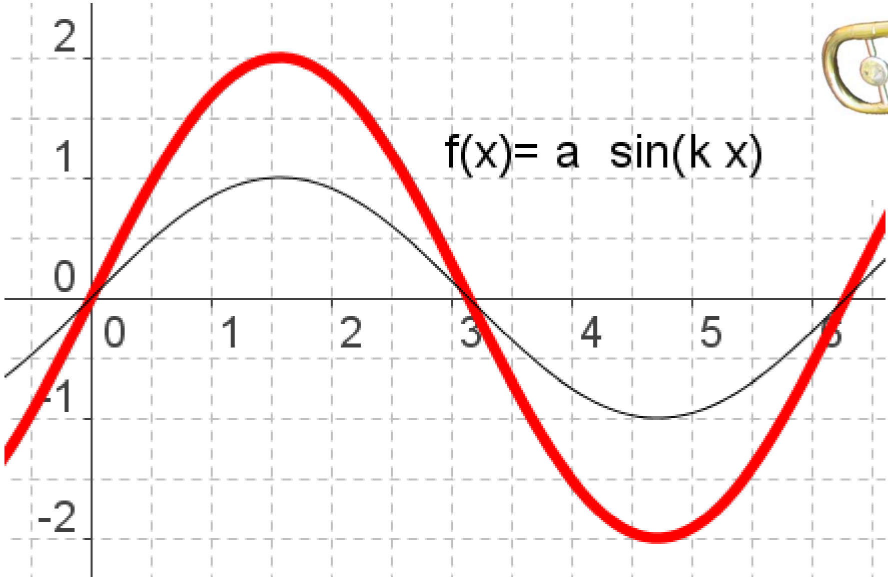


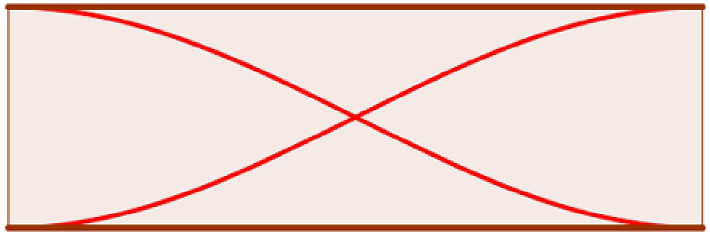
$y = \sin(3\,x)$

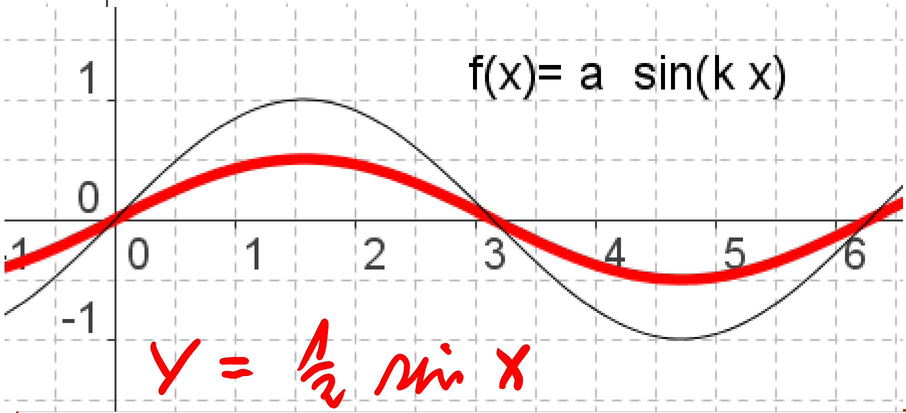
$y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

Funktionen strecken und stauchen

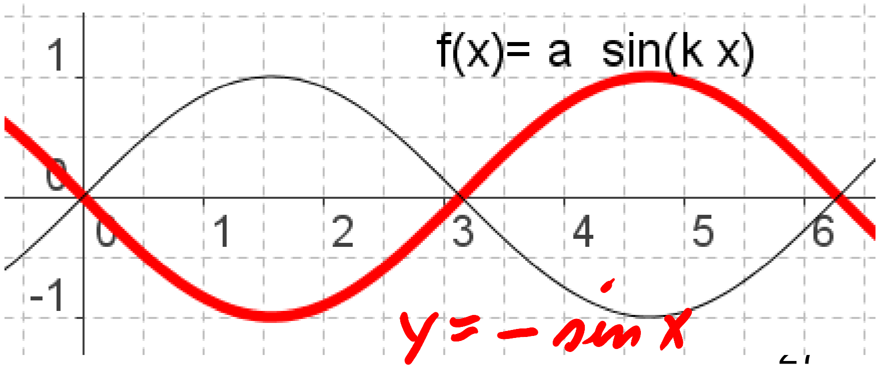
$y = 2 \sin x$







$y = \frac{1}{2} \sin x$

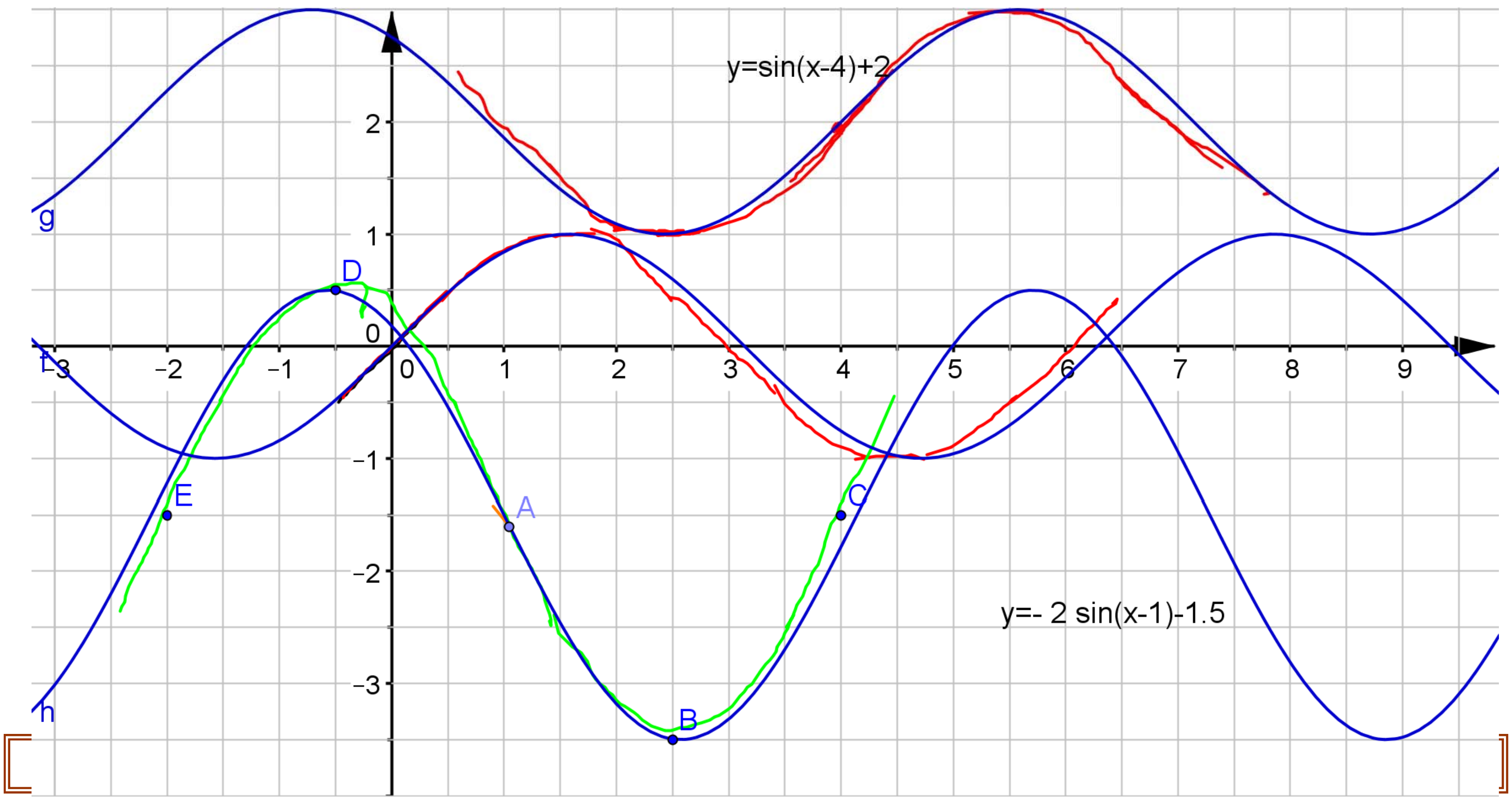


$y = -\sin x$

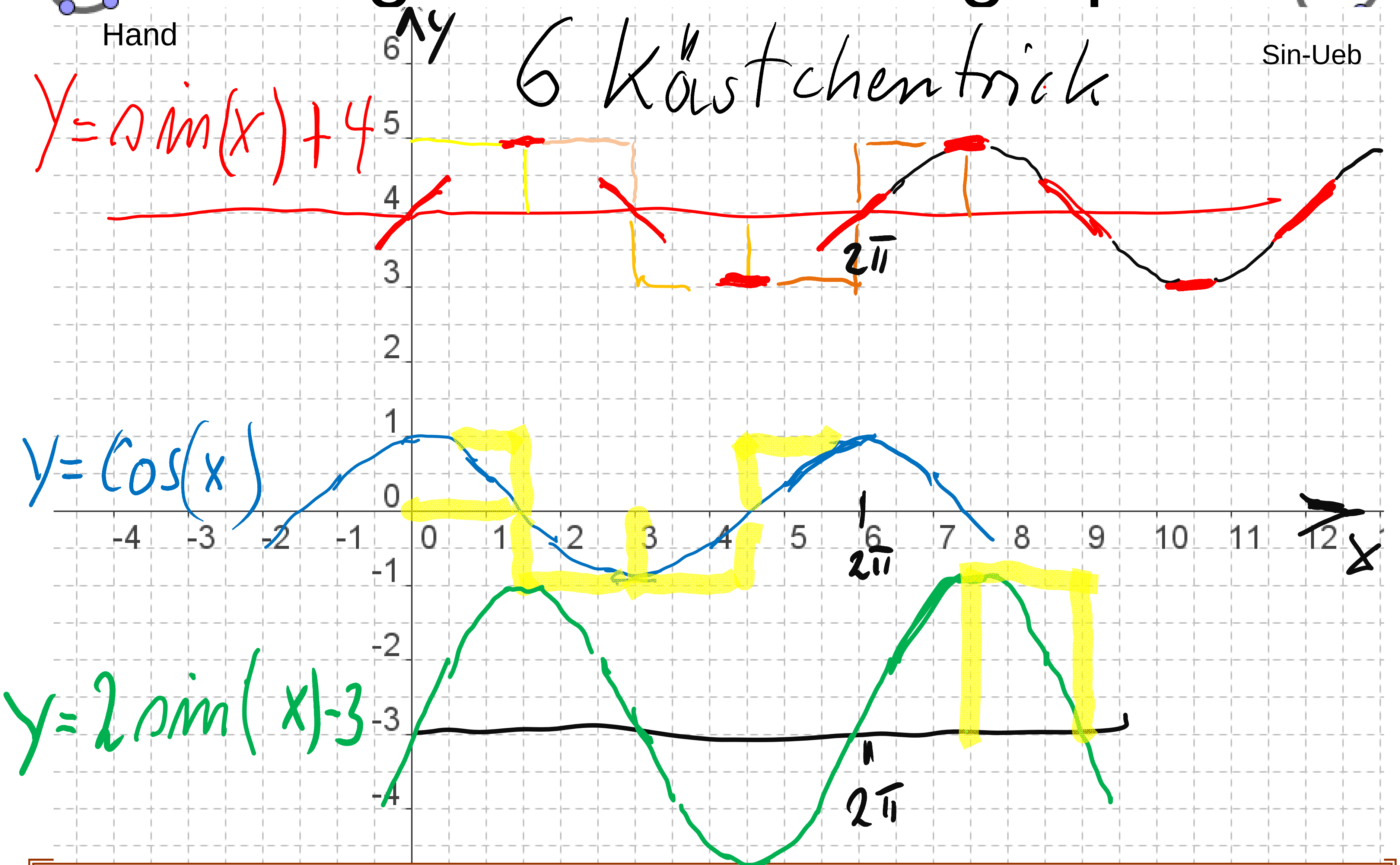
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Sinus von hand Zeichnen

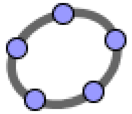
Sinus von hand Zeichnen

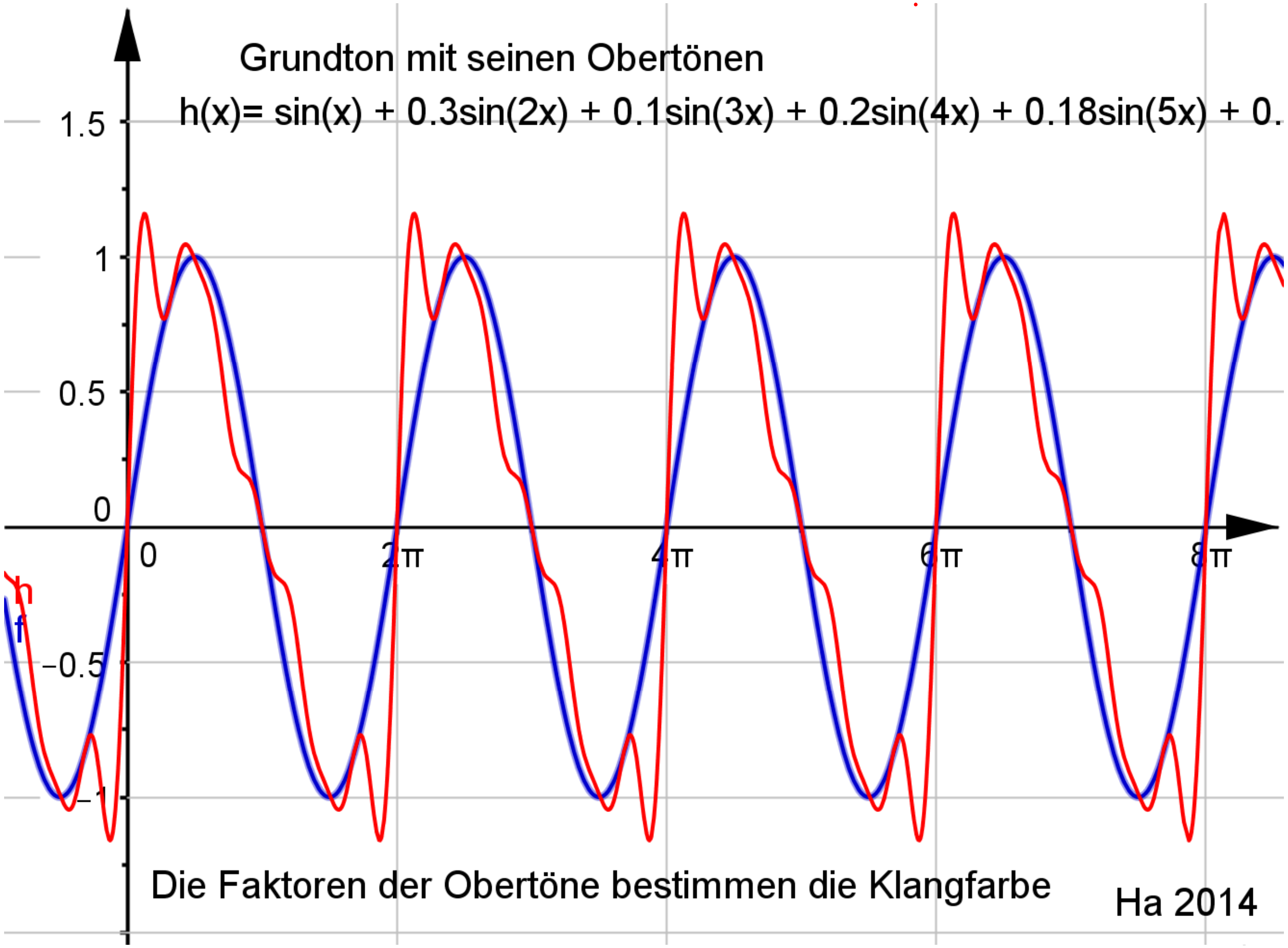


Übung mit Funktionsgraphen



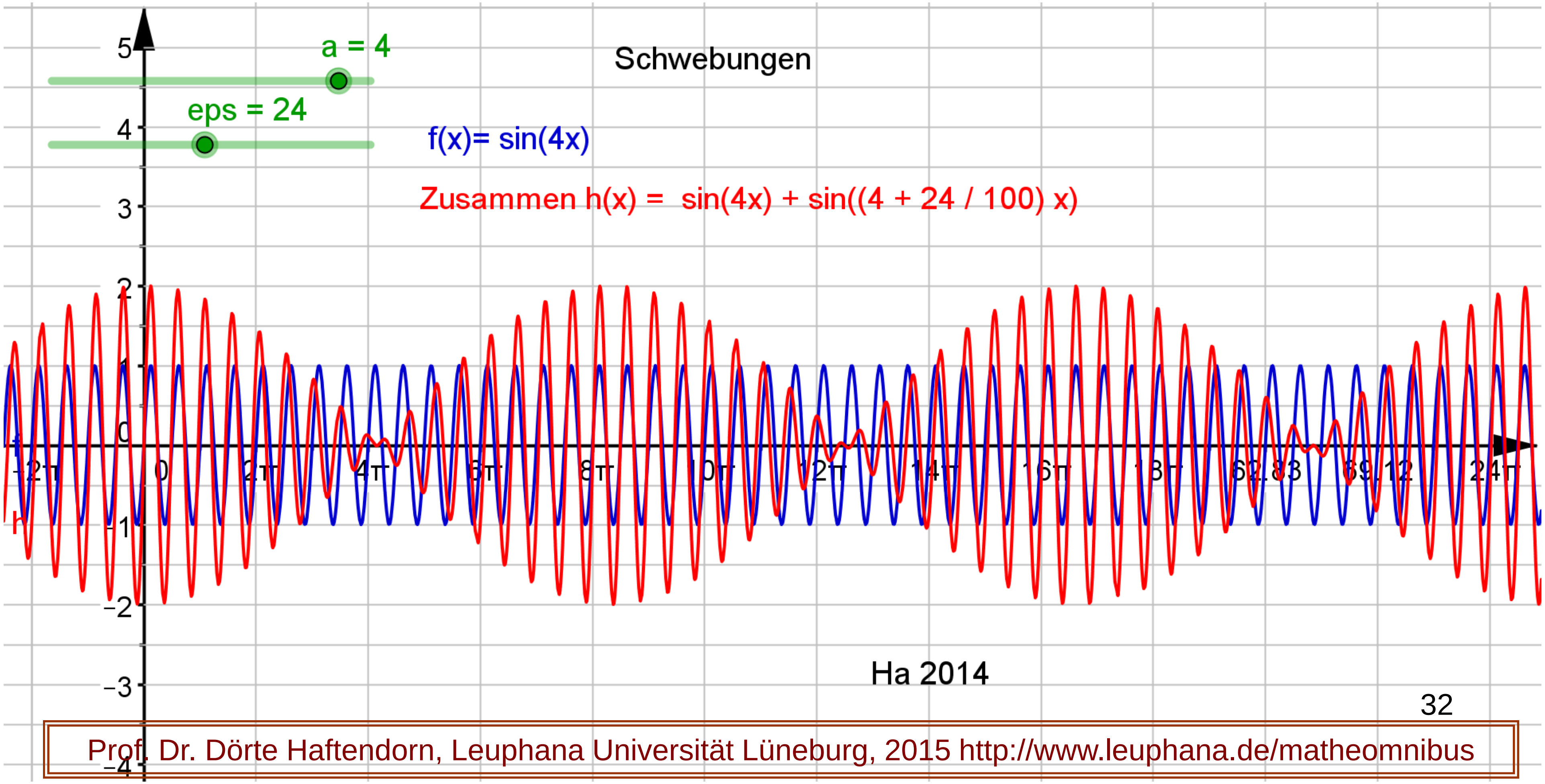
Die Klangfarbe zeigt sich durch ein anderes „Obertonspektrum“





Schwebungen, sie entstehen, wenn dicht benachbarte Töne gemeinsam erklingen

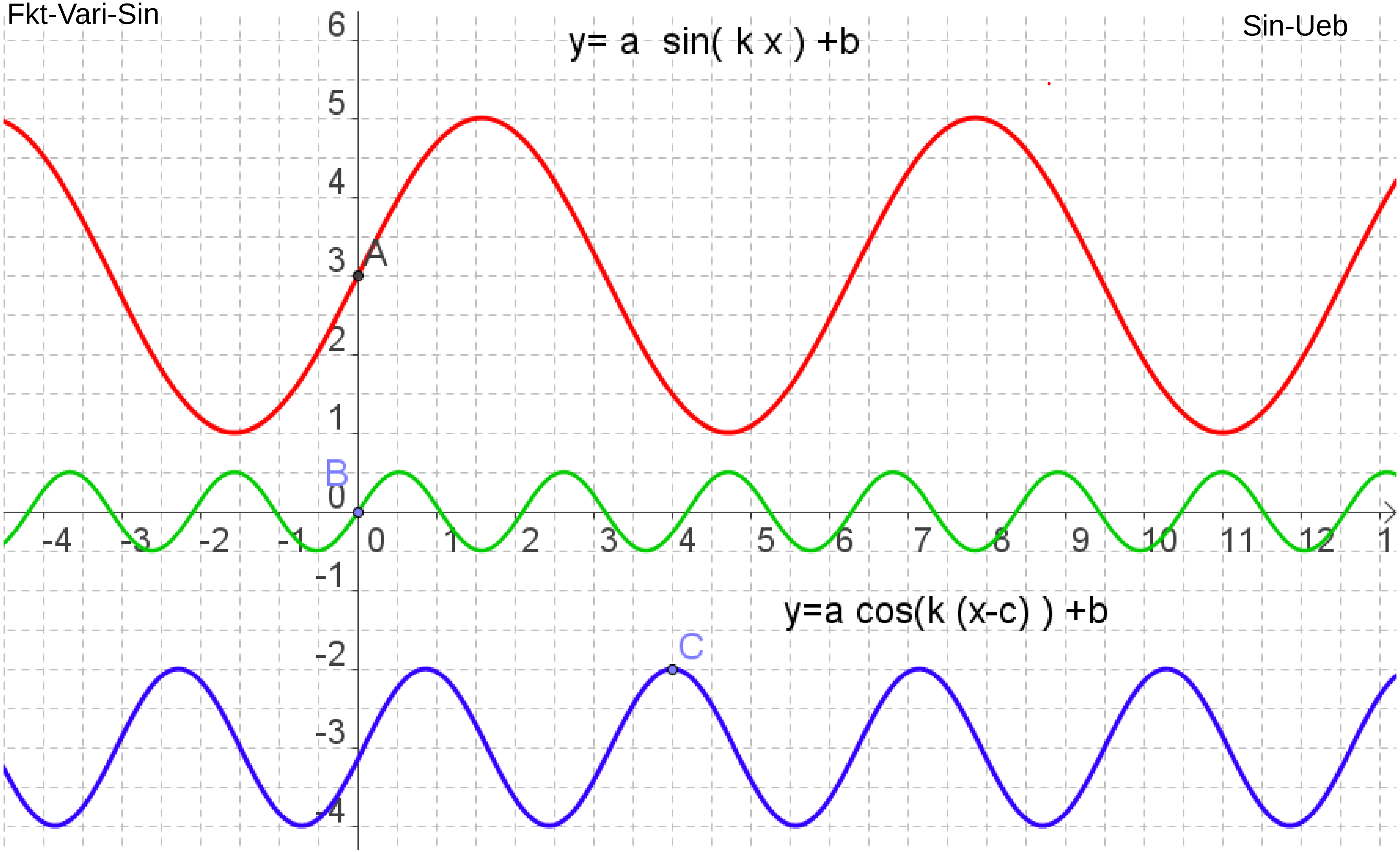
schwebungen_ggb



Funktionen variieren

Fkt-Vari-Sin

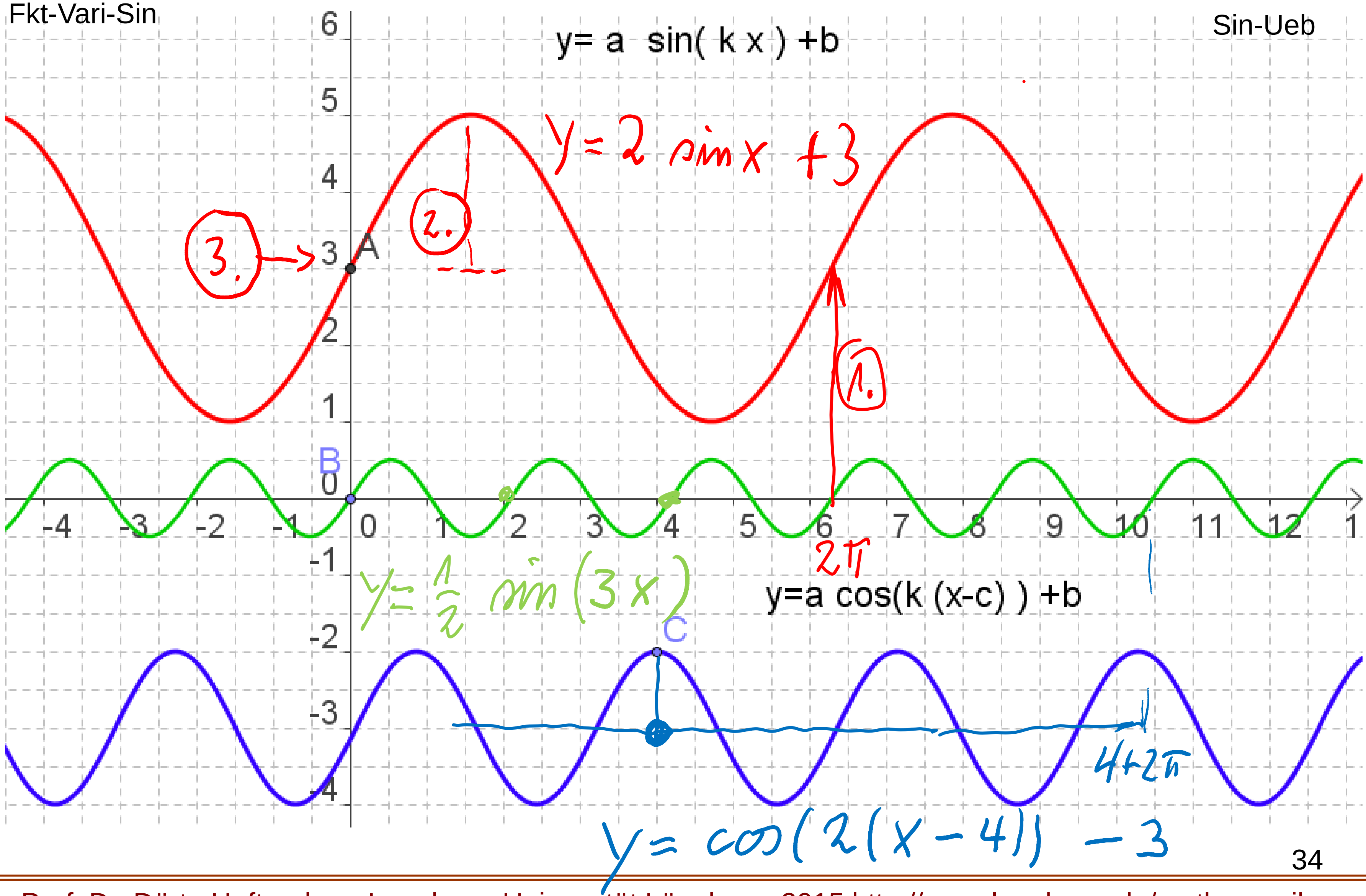
Sin-Ueb



Funktionen variieren

Fkt-Vari-Sin

Sin-Ueb



Sinus strecken und stauchen

Welle