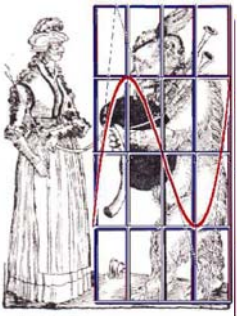
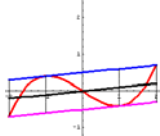


Polynome und mehrfache Nullstellen

Polynome sind Gefangene ihrer leicht durchschaubaren Eigenschaften.

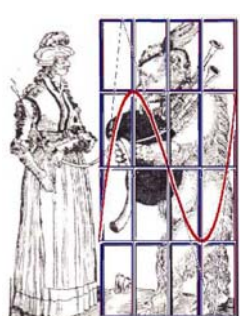
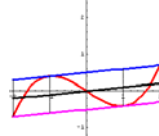
Stichwort: Polynome im Affenkasten

www.mathematik-verstehen.de

1

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Polynome und mehrfache Nullstellen

gerade

schräg

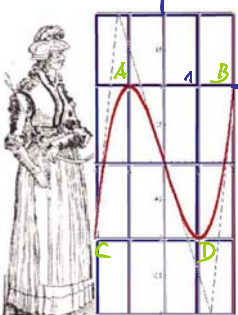
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$

www.mathematik-verstehen.de

2

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Nullstellen \iff Linearfaktoren



$f(x) = (x+1)^2(x-2)$

doppelte Nullstelle $x = -1$ (A)

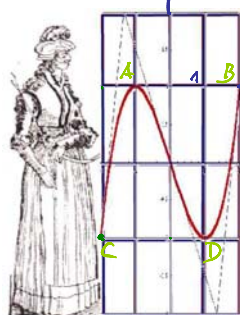
einfache Nullstelle $x = 2$ (B)

Lin.

3

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Nullstellen \iff Linearfaktoren



$f(x) = (x+1)^2(x-2)$

doppelte Nullstelle $x = -1$ (A)

einfache Nullstelle $x = 2$ (B)

Proben

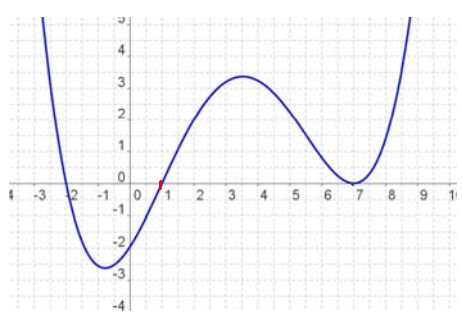
$f(-2) = (-2+1)^2(-2-2) = -4$ (C)

$f(1) = (1+1)^2(1-2) = -4$ (D)

4

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

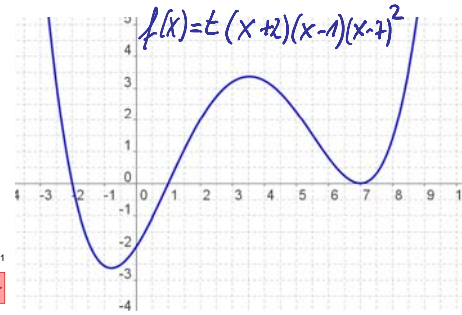
Welche Gleichung kann dieses Polynom haben?



5

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Welche Gleichung kann dieses Polynom haben?



$f(x) = (x+2)(x-1)(x-2)^2$

Diese Funktion

Vieta

Vieta, mehr

6

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Was ist eigentlich ein Polynom?

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Ein Polynom ist eine Summe von Potenzfunktionen.
Der höchste Exponent, der vorkommt, heißt **Grad des Polynoms**.

- Polynome 1. Grades sind die Geraden
- Polynome 2. Grades sind die Parabeln
- Polynome 3. Grades haben immer eine symmetrische s-Form.
- Polynome 4. Grades haben höchstens 3 Extrema.
- Je höher der Grad, desto vielfältigere Formen sind möglich.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Polynome und ihre Linearfaktoren

Jede reelle Nullstelle a erzeugt einen Linearfaktor. $(x - a)$

$$f(x) = (x - a) q(x)$$

Wenn das Restpolynom auch noch die Nullstelle a enthält, kann man den Linearfaktor mehrfach „herausziehen“.

$$f(x) = (x - a)^k p(x) \text{ mit } p(a) \neq 0$$

Geht das maximal k -mal, dann heißt a k -fache Nullstelle, oder „Nullstelle der Vielfachheit k “

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Polynome und ihre Linearfaktoren

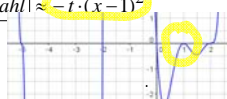
$$f(x) = (x - a)^k p(x) \text{ mit } p(a) \neq 0$$

In der Nähe eine k -fachen Nullstelle verhält sich das Polynom wie sich die k -Potenzfunktion im Ursprung verhält.

$$f(x) = (x + 5)^3 (x + 2) x (x - 1)^2 (x - 2)^3$$

$$f(\text{nahe } 1) = \boxed{\text{pos. Zahl}} \cdot (x - 1)^2 \cdot \boxed{\text{neg. Zahl}} \approx -t \cdot (x - 1)^2$$

Grad 10 Gesamtverlauf



Ein Polynom n -ten Grades hat höchstens n Nullstellen, mit ihrer Vielfachheit gezählt. Fundamentalsatz der Algebra (reell)

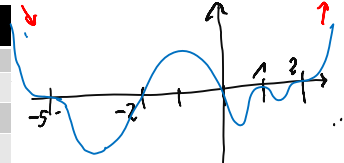
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Polynome und ihre Linearfaktoren

$$f(x) = (x + 5)^3 (x + 2) x (x - 1)^2 (x - 2)^3$$

Qualitativer Graph eines durch Linearfaktoren gegeben Polynoms

Vorzeichen	Grad	Ges. Verlauf
+	gerade	↘ ↗
-	gerade	↗ ↘
+	ungerade	↗ ↗
-	ungerade	↘ ↘



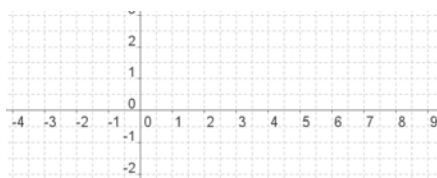
$$(x-a)^3(x-b)^2(x-c) \cdot (x-d)^k \cdot (x-e) \cdot (x-f)^5 \quad \text{Grad?}$$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Übung 2 mit Polynomen

Polynome aus Linearfaktoren zeichnen

$$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1) \cdot (x-7)^2$$



11

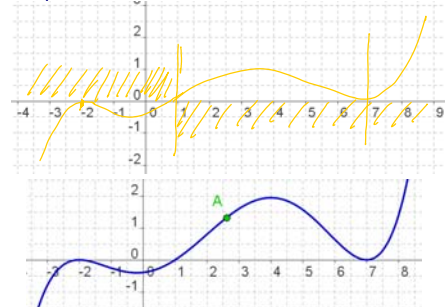
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Übung 2 mit Polynomen

Polynome aus Linearfaktoren zeichnen

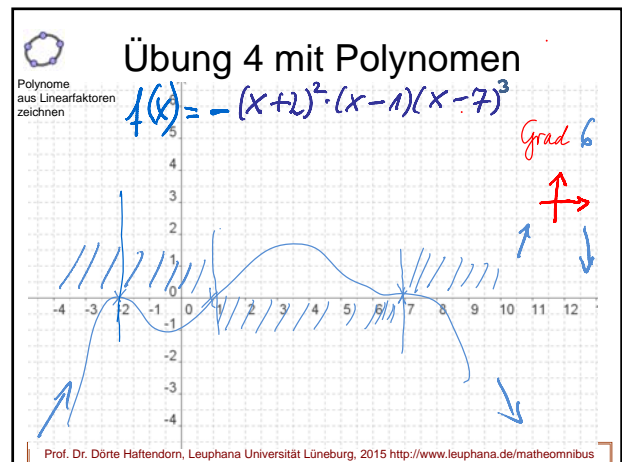
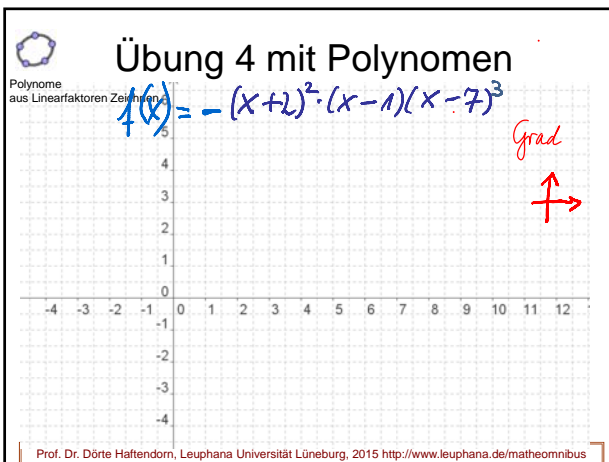
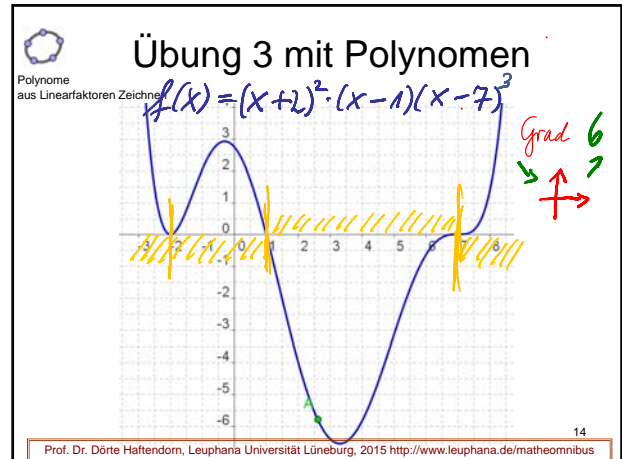
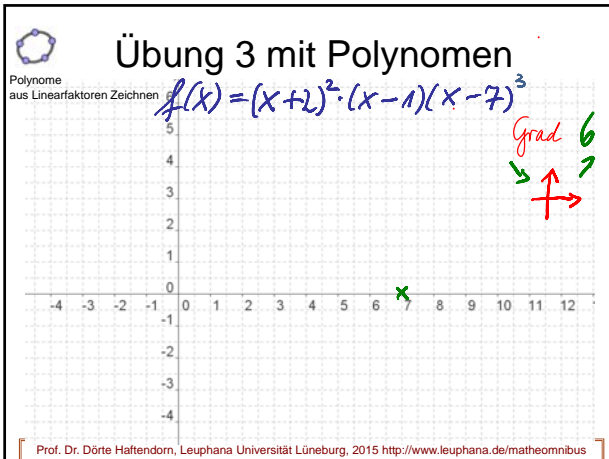
$$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1) \cdot (x-7)^2$$

Grad 5



12

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>



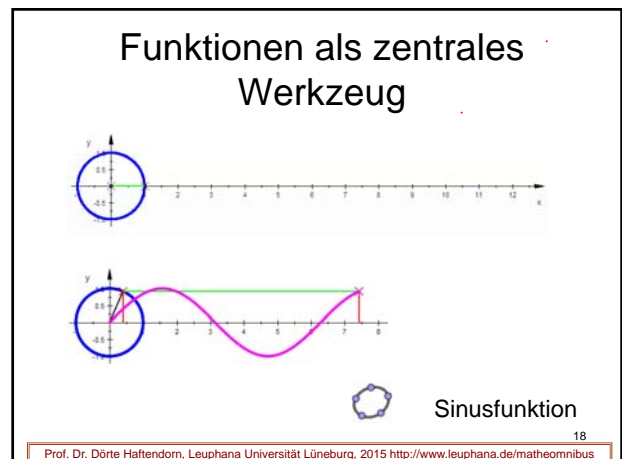
Funktionen als zentrales Werkzeug

- Potenzfunktionen
- Polynome
- Trigonometrische Funktionen
- Exponentialfunktionen
- Davon so manche Umkehrfunktionen
 - Wurzelfunktionen
 - Arkusfunktionen
 - Logarithmusfunktionen

Und das noch koppeln mit + - • / ^ und Verkettung.

Das war's dann aber auch

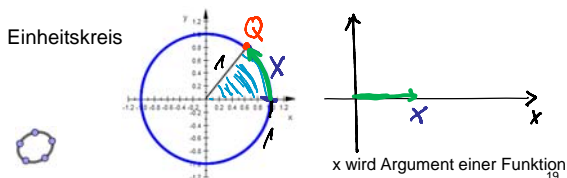
Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>



Die Winkel-Funktionen

Der Punkt Q läuft im Einheitskreis vom Start (1/0).
(mathematisch positiv = gegen die Uhr)

Den von Q zurückgelegten Weg x nennt man auch „das Bogenmaß des Winkels“, um den sich Q gedreht hat.
Kurz: x ist der Winkel im Bogenmaß

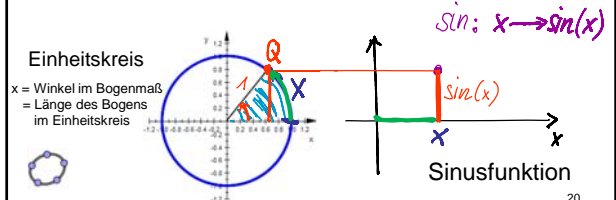


Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Die Sinus-Funktion

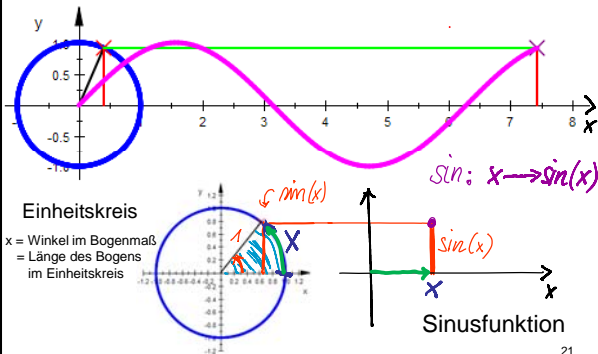
Dem Winkel x wird nun die Ordinate von Q zugeordnet.

Die Funktion, die das leistet, heißt Sinus-Funktion.



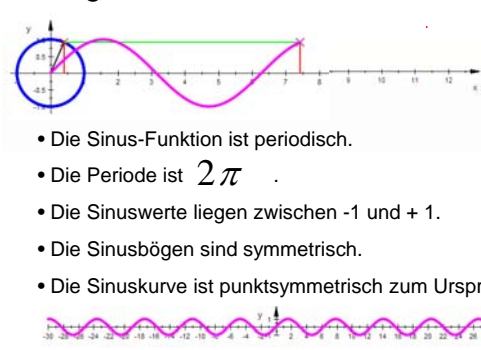
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Die Sinus-Funktion



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Eigenschaften der Sinus-Funktion



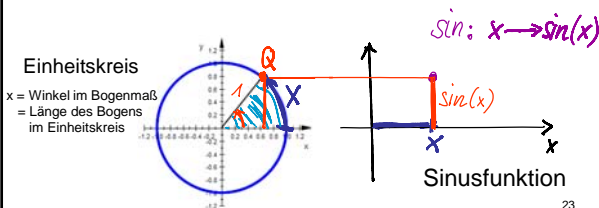
- Die Sinus-Funktion ist periodisch.
- Die Periode ist 2π .
- Die Sinuswerte liegen zwischen -1 und +1.
- Die Sinusbögen sind symmetrisch.
- Die Sinuskurve ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Die Sinus-Funktion

Dem Winkel x wird nun die Ordinate von Q zugeordnet.

Die Funktion, die das leistet, heißt Sinus-Funktion.

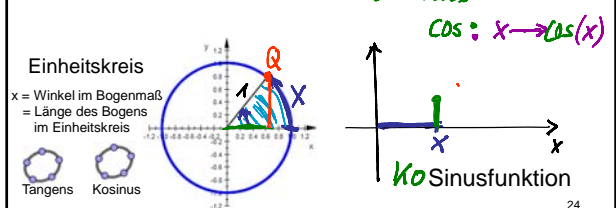


Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Die Kosinus-Funktion

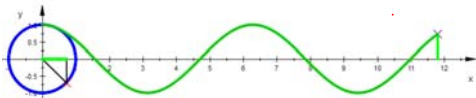
Dem Winkel x wird nun die ~~Ordinate~~ ^{Abzisse} von Q zugeordnet.

Die Funktion, die das leistet, heißt ~~Sinus~~ ^{Kosinus}-Funktion.

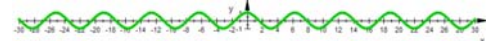


Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Eigenschaften der Kosinus-Funktion



- Die Kosinus-Funktion ist periodisch.
- Die Periode ist 2π .
- Die Kosinuswerte liegen zwischen -1 und +1.
- Die Kosinusbögen sind symmetrisch.
- Die Kosinuskurve ist symmetrisch zur y-Achse

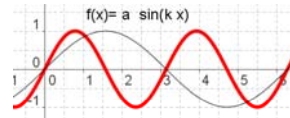


25

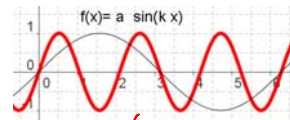
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Funktionen strecken und stauchen

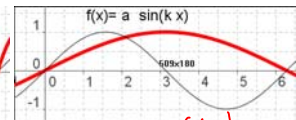
$$y = \sin(2x)$$



Ein Faktor direkt beim x sorgt für waagerechtes Strecken und Stauchen.



$$y = \sin(3x)$$



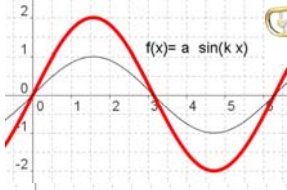
$$y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

26

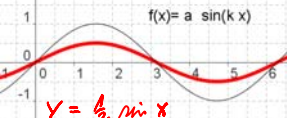
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Funktionen strecken und stauchen

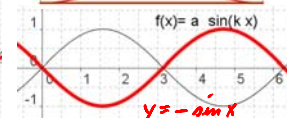
$$y = 2 \sin x$$



Posaune



$$y = \frac{1}{2} \sin x$$



$$y = -\sin x$$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

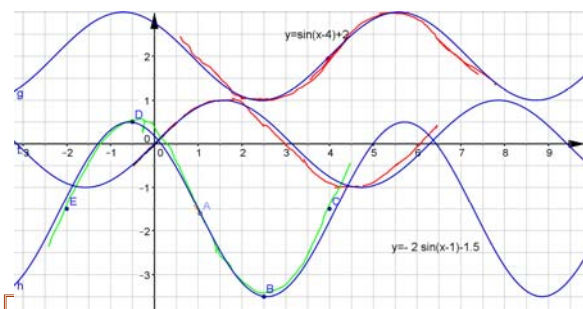
Sinus von hand Zeichnen



28

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

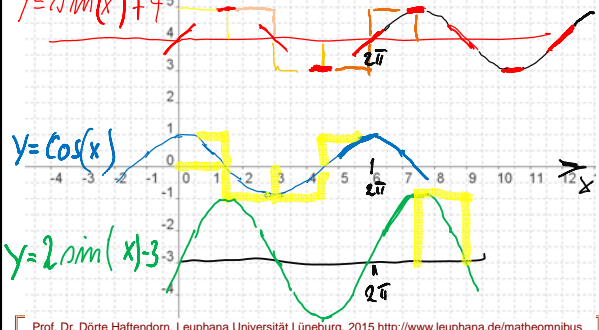
Sinus von hand Zeichnen



Übung mit Funktionsgraphen

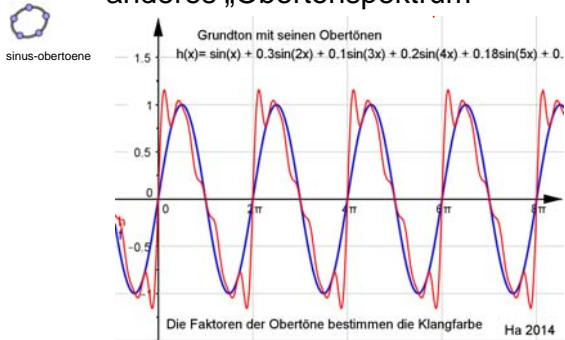
$$y = \sin(x) + 4$$

6 Kästchen-trick



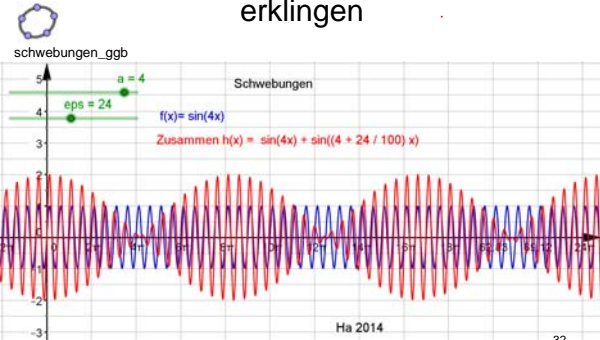
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Die Klangfarbe zeigt sich durch ein anderes „Obertonspektrum“



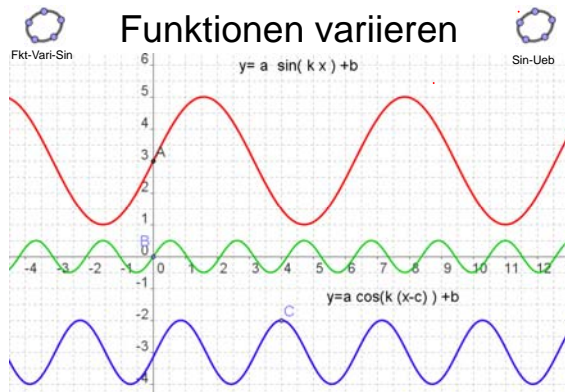
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Schwebungen, sie entstehen, wenn dicht benachbarte Töne gemeinsam erklingen



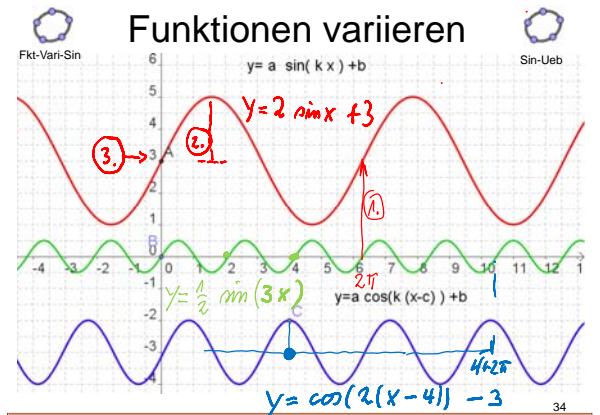
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Funktionen variieren



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Funktionen variieren



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

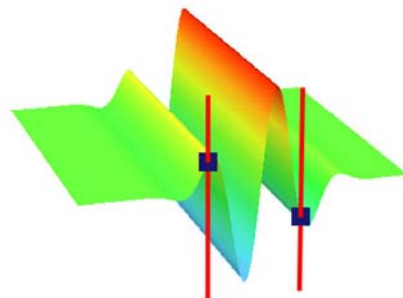
Sinus strecken und stauchen



35

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Welle



36

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2015 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>