matheomnibus Leuphana Universität Lüneburg matheomnibus Leuphana Universität Lüneburg

Prof. Dr. Dörte Haftendorn Leuphana Universität Lüneburg
http://www.leuphana.de/matheomnibus

Mathematik für alle

Informationen	Planung, Konzept, Zeiten, Organisation...
Literatur	Literatur und Hilfen für das 1. Semester und grundlegende Mathematik-Werke
moodle	Einführung pdf Einführung *.ppt Kurs online moodle
Themen	Themenseiten zu den im Leuphana-Semester angesprochen Aspekten • Moderne Mathematik Vorlesungen 1, 2, 3, 4 • Funktionen als zentrales Werkzeug Vorlesungen 5,6,7,8, 9 (Teil 1) • Optimierung als Ziel Vorlesung 9 (Teil 2), 10,11 • Numerik Vorlesung 12 • Werkzeuge der Mathematik Vorlesung 13 Binärzahlen und Werkzeuge • Selbstverständnis der Mathematik, allgemeines Vorgehen Vorlesung 14 • Repetitorium und wichtige Hinweise zur Klausur
Statistik-Hilfen	• Leitseite zur beschreibenden Statistik • ○ Fathom, das Statistik-Programm auf allen Computern der Leuphana ○ Einführende Seiten und viele weitere Hilfen ○ Beantwortung von Fragestellungen aus den Projekten
Werkzeuge	Es gibt heute verschiedene Computerwerkzeuge für Mathematik, eine sinnvolle Auswahl wird auch im Leuphana Semester eingesetzt. Zur Ausstattung gehört unbedingt kariertes Papier, Bleistift, Radiergummi und anspitzbare, radierbare Buntstifte.

Bericht über die Durchführung WS 0708
Ergebnis der Klausur und Auswertung pdf
Studentische Lehrevaluation, Zusammenfassung pdf Weitere Seite mit Statements pdf
Druckversion aller Themenseiten dieser Site und aller Vorlesungsfolien von 2007 pdf Vorsicht 21 MB

Zeichenerklärung					
Typ	Zeichen	Erklärung	Typ	Zeichen	Erklärung
Allgemein	pdf	Druckoptimerte Datei im pdf-Format (Adobe Reader...)	Allgemein	LERN Info	Sie dienen sinnfälligen Zwecken.

Powerpoint		Web-Version, optimiert für Internetexplorer	GeoGebra		Damit wurde in der Vorlesung selbst die passende GeoGebra-Datei geöffet. Das wird auf Ihrem Computer nicht gehen.
Powerpoint		Druckversion, 6 Folien pro Seite	GeoGebra	Text	Dies ist das Applet, also die im Internet von Jedermann ansehbare interaktive Datei.
Powerpoint		Original-Präsentation Besser in Firerfox... öffnen, denn im IE bleibt das Browserfenster bestehen.	GeoGebra		Dies ist die GeoGebra Datei selber. Wenn Sie GeoGebra auf Ihrem Rechner haben, geht es beim Doppelklick mit dieser Datei auf. Dann haben Sie alle Möglichkeiten frei selber zu experimentieren.
MuPAD		Damit wurde in der Vorlesung selbst die passende MuPAD-Datei geöffet. Das wird auf Ihrem Computer nicht gehen.	MuPAD		Dies ist die Druckversion der MuPAD-Datei.
MuPAD	Text	Dies ist die Webversion der MuPAD-Datei. Sie wird sehr schnell angezeigt.	MuPAD		Dies ist die MuPAD-Datei selber. Sie ist nur für Nutzer von MuPAD sinnvoll. In manchen Brwosern geht bei Doppelklick MuPAD auf. Sonst: "Ziel speichern unter..."

Dies ist die Website für den Teil "Mathematik für alle" im "Leuphana Semester" ab dem WS 07/08

[my]

[matheomnibus] [Plan und Konzept] [Themen] [Statistik-Hilfen] [Werkzeuge]

Inhalt und Webbetreuung ©Prof. Dr. Dörte Haftendorn Feb 2006, update 26. Februar 2008

matheomnibus Leuphana Universität Lüneburg

www.leuphana.de/matheomnibus www.mathematik-verstehen.de
www.doerte-haftendorn.de http://mathematik.uni-lueneburg.de

MATHEMATIK-VERSTEHEN Mathematik und Didaktik der Mathematik

Planung, Konzept, Zeiten, Organisation...

Mathematik für alle

Verantwortlich: Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Information

Die Leuphana Universität Lüneburg hat eine neue Gestaltung des 1. Semesters entworfen, bei der die Studierenden in großem Maße **gemeinsam** in das wissenschaftliche Arbeiten und Denken eingeführt werden. Diese Form heißt "**Leuphana-Semester**".
Ein Teil des Moduls "**Wissenschaft nutzt Methoden**" ist die Veranstaltung "**Mathematik für alle**", um die es hier geht.

Konzept:

Grundgedanken und Methoden der Mathematik, die für alle Studierenden wichtig sind, sollen verständlich vorgestellt werden. Ausgewählte "Fokusaufgaben" werfen Schlaglichter auf die verschiedenen Gebiete. Qualitatives Vorgehen wird eine wesentliche Rolle spielen, Möglichkeiten und Grenzen der Computer in der Mathematik kommen zur Sprache. Insgesamt wollen wir den Mut wecken, sich im Fachstudium angstfrei den dort ggf. noch notwendigen Vertiefungen mathematischer Kompetenzen zuzuwenden.
Mathematik wird in der Schulzeit vorwiegend als kumulatives Fakten- und Formelwissen erlebt, welches es auswendig zu lernen gilt. Dass Mathematik nicht nur ein Produkt ist, sondern auch ein Prozess, dass sie eine geistige Möglichkeit bietet, die Welt in bestimmter Hinsicht zu strukturieren, dass es sich um eine aktive Fragehaltung und ein Tätig-Sein handelt, wird demgegenüber bislang kaum erfahren.
Da neben dem angstfreien Umgang insbesondere diese veränderte Haltung gegenüber der Mathematik als wichtigstes Ziel gelten kann, muss die Veranstaltung diese als Gesamtkonzept erfahrbar machen. Deshalb wird keine Trennung von Vorlesung und Übung vorgenommen, sondern eine integrierte und damit zeitlich ausgedehntere gemeinsame Auseinandersetzung vorgesehen. Die einzelnen Veranstaltungen leben Mathematik in diesem Sinne vor, thematisieren Zusammenhänge von einem höheren, jedoch verständlichen Standpunkt aus und lassen durch die Kontrastierung zu schulischem, häufig algorithmischem Vorgehen diese veränderte Haltung sichtbar werden. Neben einer derartig vorgelebten Haltung werden in dieser Veranstaltung Fokusaufgaben zum eigenen Erproben eine wesentliche Rolle spielen, die jedoch nicht ausgelagert, sondern gemeinsam und integriert im Sinne dieser Überblickshaltung einen Weg zur Verhaltensänderung ermöglichen.

Planung

Inhalte "Mathematik für alle", Vorlesungen mit integrierten Übungen	
Kryptographie, Codierung, Graphentheorie	Unsere elektronische Welt ist ohne Mathematik nicht denkbar. Kryptografische Methoden ermöglichen sichere Kommunikation, Elektronische Signatur und Vieles mehr. Codierung gibt es nicht nur im Handel

	(Barcode) sondern auch der Wandlung von Musik in Daten der CD. In das moderne Gebiet Graphentheorie führen kürzeste Wege-Probleme, konfliktfreie Ampelschaltung und logistische Probleme ein.
Funktionen als ein zentrales Werkzeug	Die Funktionen der Schule werden unter übergreifenden Gesichtspunkten zusammengefasst, Ableitungen und Integrale werden in ihren Aussagen neu verstanden und verknüpft. Ein Grundverständnis von 3D-Funktionen ist heute wichtig.
Optimieren als Ziel	Lineares Optimieren steht im Fokus für viele Optimierungsprobleme, aber auch andere Optimierungsversuche und die Begrenztheit der Aussagen werden thematisiert. Lineare Algebra Matrizen, lineare Gleichungssysteme werden in ihrer grundlegenden Relevanz vorgestellt. Markowketten geben den Fokus auf Entscheidungs- und Prognose-Methoden.
Numerik und Werkzeuge der Mathematik	Wenn man ein Problem nicht exakt lösen kann, so beschafft man mit Numerik wenigstens sinnvolle Zahlen. Dabei wird der Computer als Knecht für Mathematik-Bewältigung betrachtet und seine Grenzen werden aufgezeigt.
Allgemeines Vorgehen der Mathematik	MModellierung von Wirklichkeit, Lösen im mathematischen Modell, Prüfung der Lösung an der Wirklichkeit, Entscheiden, Prognostizieren, Beweisen.... werden als zentrale Aufgaben der Mathematik hervorgehoben. Mathematiker haben aber auch Freude an der Ästhektik und dem konsisenten Aufbau ihres Faches. So ergibt sich ein angemessenerer Blick auf das Selbstverständnis und die Rolle der Mathematik in den Wissenschaften.
Durchführung der Vorlesung:	Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Studierende

Die Majors legen fest, welche zwei der drei Veranstaltungen in den "fachübergreifenden Methoden" belegt werden müssen.
"Mathematik für alle" ist vorgesehen für alle, die Mathematik noch weiterführen: Wirtschaftsnahe Fächer, Ingenieurfächer, Informatik, weiter auch für alle Lehrämter, unabhängig von Schulformen und Fächern.
Weiterhin sind WS 0708 auch die BA-Lehrämtler GHR des WS 06-07 mit dabei.

Organisatiom

Organisatiom
im Überblick pdf Präsentation vom16.10.07 *.ppt

Zeiten

Gruppe 1 Dienstag 1. Block und Donnerstag 2. Block
Gruppe 2 Dienstag 2. Block und Donnerstag 1. Block

Studierende mit Kollisionen mit den Unterrichtesfächern(bes. Lehramt GHR) können auch beide Male den 1. Block nehmen.

Das findet in den ersten sieben Wochen des Semesters statt.
Responsorium: Fragen zur Klausur werden nochmals abschließend am Samstag WS 0708 2. Dez 8-10 und 10-12 geklärt.
Am Samstag der 8. Woche, WS 0708 am 8.12.07 wird von 10 bis 12 eine Klausur geschrieben.

> Achtung, die Anmeldung erfolgt in mystudy. Die Zuordnung zu einer der beiden Gruppen erfolgt ohne ihren Einfluss. Sollten Sie eine wichtige Präferenz für gewisse Zeiten haben, wenden Sie sich an Herrn Scheller: dschelle at leuphana.de
> Bei ernsthaften Problemen wenden Sie sich bitte an unsere Koordinatorin Frau Cristima Blohm: blohm at leuphana.de

Online-Forum

Im Rahmen des Moodlekurses für das Leuphana-Semester wird ein Forum eingerichtet, in dem die Studierenden Fragen stellen können, die von fortgeschrittenen Studierenden des Berufsschullehramtes und einer Lehrkraft beantwortet werden. Dort werden auch weitere Übungsaufgaben zur Verfügung gestellt. Da der Bereich dann einen geschützten Zugang hat, können dort auch Vorlesungs-Ergänzungen eingestellt werden, die dem Urheberrechtsschutz unterliegen.

Unter-stützungen

Die oben genannten Personen haben auch Sprechzeiten, in denen sie für Fragen zur Verfügung stehen.

Diese Seiten matheomnibus bieten weitere Hilfen an, insbesondere zum Gebrauch von Computerwerkzeugen zur Mathematik.
Hier finden sich auch die "Tafelnanschriebe" und Präsentationen der Vorlesung.

Die große Site MATHEMATIK-VERSTEHEN bietet vielerlei Hilfen und Lernstoff an, insbesondere auch Nützliches für das weitere Studium.

Bericht über "Mathematik für alle" im Leuphana-Semester

Verantwortlich: Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Vorlesung

Jeder Studierende hatte dienstags und donnerstags zwei Vorlesungsstunden bei Frau Haftendorn. Diese wurden an beiden Tagen doppelt inhaltsgleich hintereinander gehalten, da es sich um 1200 Studierende handelte.

Die Präsentation erfolgte auf mehrenen Ebenen. Hauptelement waren anregende bildlichen Darstellungen und Statements mit Powerpoint-Folien. Diese wurden teilweise wie eine Tafel in Gegenwart der Lernenden und im ihrem Denktempo von Hand beschrieben. Durch eine spezielles Notebook wurde damit das Mangel ausgeglichen, dass während einer Präsentation die Tafel nicht nutzbar ist. Die Druckform der Folien in der Anlage zeigt diese Vorgehensweise nur unzureichend.

Als zweites Element hatten die Studierenden im Rahmen einer sofort zu lösenden Aufgabe Zeit, miteinander zu kommunizieren, sich gegenseitig zu fragen und die Aufgabe zu lösen. Im Anschluss an solche eine Phase wurden mögliche Lösungen erläutert und Fragen beantwortet. Diese Phasen gab es meist zweimal etwa sechs Minuten lang in einem Vorlesungsblock.

Als drittes wesentliches Element wurden Computerwerkzeuge als mathematik-didaktische Instrumente eingesetzt. Insbesondere das freie Programm GeoGebra ermöglichte dynamische Visualierungen, die das Verstehen vertieften und von den Studierenden auch zuhause eigenständig nachvollzogen und kreativ erweitert werden konnten. Der Einsatz von CAS (Computer-Algebra-Systemen, hier MuPAD) zeigte deutlich, dass heute die Kalküle der Mathematik von mächtigen Werkzeugen bewältigt werden, dass aber umso mehr Anforderungen hinsichtlich Verständnis und Deutung der Ergebnisse an die Nutzer gestellt werden.

Unterstützung

Moodle-Plattform

Im Bereich Mathematik fand, wie auch bei "Forschungsmethoden" eine Unterstützung der Präsenzlehre durch die Lernplattform Moodle statt. Zu allen Themen wurden textliche, nicht innermathematische Unterlagen zum Download angeboten. Die Studierenden konnten aus ca. 100 Dokumenten wählen und so ihre auf persönliche Bedürfnisse eingehen. Die Dokumente wurden inhaltlich strukturiert dargestellt. Eine Übersicht, welche Dokumente verfügbar waren, befindet sich in der Materialsammlung. Zusätzlich gab es zu jeder Vorlesung mindestens eine Beispielaufgabe. Diese konnte von den Studierenden bearbeitet und mit einer Musterlösung verglichen werden. Sollten weiterhin Probleme bestanden haben, konnten in speziellen, thematischen Foren Fragen an TutorInnen gestellt werden. Diese wurden zeitnah und umfassend beantwortet.

Tutorensprechstunden

Weiterhin wurde von den TutorInnen und einem erfahrenen Lehrer Sprechstunden für individuelle Betreuung angeboten. Diese fanden wöchentlich an sechs unterschiedlichen Terminen statt. Durch diese Zeiteinteilung wurde sichergestellt, dass alle Studierenden die Möglichkeit hatten, zu den Sprechstunden zu gehen.

Internetseite "matheomnibus"

Parallel dazu wurde die Website www.leuphana.de/matheomnibus für die Studierenden entwickelt. Sie ergänzte die Moodle-Plattform vor allem durch die in der Vorlesung eingesetzten interaktiven Applets und CAS-Seiten und ermöglichte so, das Gezeigte nochmal in Ruhe selber durchzuführen und mit eigenen Beispielen zu erproben. Dort waren auch die gesamten Vorlesungsfolien in Web- Druck- und Originalform herunterzuladen. Diese offene Site wurde auch entwickelt, um im Internet auch ohne der autorisierten Moodlezugang präsent zu sein. Das ist für Studieninteressierte wichtig und für Andere, die ebenfalls Mathematik für eine allgemeinere Hörenschaft anbieten oder sich überhaupt ein Bild über das Gebotene machen wollen

Interaktive Computer-Mathematikwerkzeuge

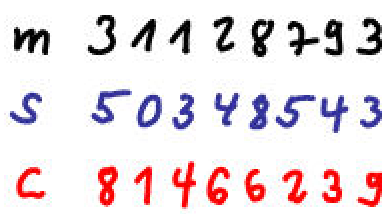
Das Bild von einer Mathematik, in der es nur auf Kalküle und Formeln ankommt kann besonderes nachhaltig verändert werden, wenn etwaige Rechenarbeit an den Computer delegiert wird und die Lernenden frei und eigenständig experimentieren, Vermutungen selbst prüfen, sich selbst Aufgaben stellen und Antworten finden können. Es geht ja sowieso nicht um die Lösung einer je einzelnen Aufgabe sondern um das Verständnis ganzer Funktionenklassen, grundlegender Strukturen, genereller Fragestellungen. GeoGebra ist eine dynamische Mathematik-Software (free) die für die freie Arbeit von Lernenden konzipiert ist. Als mächtiges CAS (Computer-Algebra-System) wurde in der Vorlesung der Einsatz von MuPAD angeregt. Hierfür hat die Leuphana an zwei Standorten (C und Vo) Poollizenzen. Besonders diejenigen, die in ihrem Werdegang mehr mit Mathematik zu tun bekommen müssen rechtzeitig begreifen, dass sie "ihre" Mathematik wirklich verstehen müssen, das pure Rechnen geschieht auf Knopfdruck. Selbstverständlich konnten hier aber nur erste Anregungen gegeben werden. Die betreffenden Major werden hier vertiefen müssen.

Klausur

Auswertung pdf

Zusammenfassung der Studentischen Lehrevaluation pdf

Moderne Mathematik



MATHEMATIK-VERSTEHEN

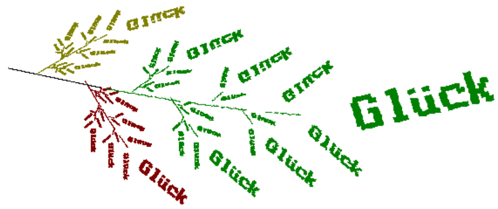
- Kryptografie
  - Einführung in die Kryptografie, Vorlesung 1 pdf *.ppt
  - Aufgabenblatt 1
  - Excel-Datei zum Selber- Experimentieren
  - Grundlagen der modernen Kryptografie, Vorlesung 2 und Vorlesung 3 Teil 1 pdf *.ppt
  - Die Aufgaben und Lösungen stehen in moodle.
- Codierung
  - Beispiele zur Codierung, Vorlesung 3 Teil 2 pdf *.ppt
  - EAN und ISBN Erklärung pdf
  - Aufgaben pdf (für Lehrer, nicht für Leuphana-Sem.)
  - Lösungen dazu pdf
  - Weiteres: Ländercodes, Seite mit Barcodes für den Unterricht, MuPAD-Seiten zum Berechnen in www.mathematik-verstehen.de Bereich Krytographie
- Graphentheorie
  - Graphentheorie, Vorlesung 4 pdf *.ppt
- Nützt das? Passt das? Reicht das?
- Knotentheorie (in Teil 4)
- Fuzzilogik(in Teil 4)

Weiterführungen, "Steinbruch" für das völlig neue Bauwerk "Mathematik für alle".

- Kryptographie
- Graphentheorie

Mathematik für alle

LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

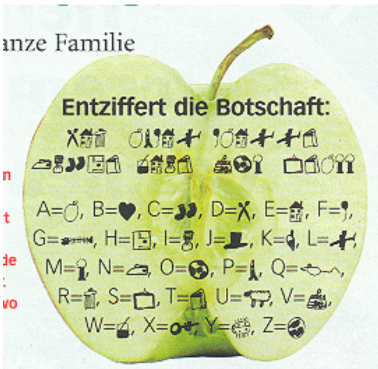


Mathematik für Kinder

auf der Kinderseite

einer Kundenzeitung

Mathematik echt leicht



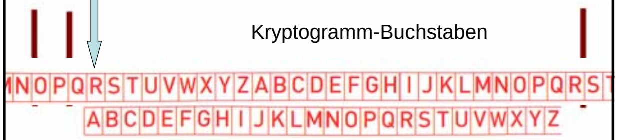
Cäsarcode, Urtyp der Kryptografie

MATHE

Schlüssel-
Buchstabe

über das A stellen

Kryptogramm-Buchstaben



Klartext-Buchstaben

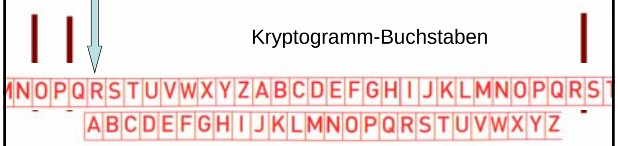
Cäsarcode Bastelanleitung

MATHE
DRKYV

Schlüssel-
Buchstabe

über das A stellen

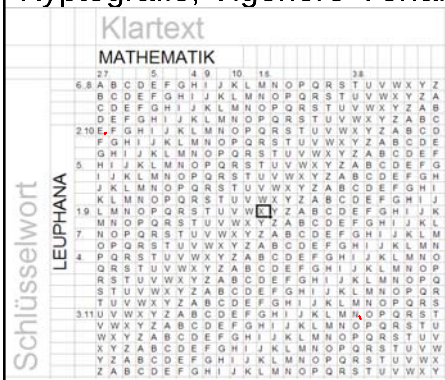
Kryptogramm-Buchstaben



Klartext-Buchstaben

Kyptografie, Vigenère-Verfahren

um 1550



Kryptogramm:

Kyptografie, Vigenère-Verfahren

Klartext

MATHEMATIK

Schlüsselwort

LEUPHANA

	2 7				5			4	9		10		1 6							3 8						
6 8	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
2 10	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
5	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1 9	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	$\boxed{X}$	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
7	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
4	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
3 11	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Kryptogramm:

XENWLMNTTO

DYJTY

Kyptografie macht sich auf den Weg

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

ASCII−30

MATHE

4735544239

Kyptografie macht sich auf den Weg

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Vigenère-Chiffrierung mit Ziffern

s \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

MATHE

Klartext m 4735544239

Schlüssel s 2846935817

frei erfunden

Zahlen ermöglichen gute Kryptografie

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Vigenère-Chiffrierung mit Ziffern

s \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

MATHE

Klartext m 4735544239

Schlüssel s 2846935817

c = 657147

Zahlen ermöglichen gute Kyptografie

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Vigenère-Chiffrierung mit Ziffern

s \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

MATHE

Klartext m 4735544239

Schlüssel s 2846935817

c = 657147 .....

c = 6781

s = 2846

m =

Rechnen geht besser als Ablesen

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

MATHE

Die Tabelle können wir vergessen, man kann das ganz einfach auch ausrechnen!

Klartext m 4735544239

Schlüssel s 2846935817

c = 657147 .....

Ziffernweise ohne Übertrag addieren

$m_z + s_z = c_z$

Ziffernweise abziehen „modulo 10“

$c_z - s_z = m_z$

c = 6781 4697

s = 2846 9358

m = 4945

Kyptografisches Protokoll

one-time-pad (dezimal)

- Vorbereitungsphase
  Anton und Berta vereinbaren einen Schlüssel
- Anwendungsphase: Verschlüsselung (encryption)
  1. Anton übersetzt einen Klartext in eine Zahl m
  2. Er addiert ziffenweise „modulo 10“ (d.h. ohne Übertrag) den Schlüssel s
  3. Das Ergebnis c schickt er Berta.
- Entschlüsselung (decryption)
  1. Berta subtrahiert ziffernweise „modulo 10“ den Schlüssel von dem Krytogramm c und erhält m
  2. Sie übersetzt m zurück in Buchstaben und liest.

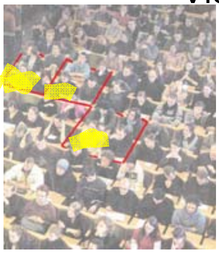
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

$$m_Z + s_Z = c_Z$$

$$c_Z - s_Z = m_Z$$

Vierer-Übung



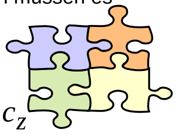
Vier Studis bilden eine Gruppe

Rechts-Unten sagt den Schlüssel an.
8 Stellen zufällig

Die, die nebeneinander sitzen, verschlüsseln ein Wort mit 4 Buchstaben.

Die beiden anderen müssen es herausbekommen.

6 Minuten



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

$$m_Z + s_Z = c_Z$$

$$c_Z - s_Z = m_Z$$

Organisation und Hilfen

- Website www.leuphana.de/matheomnibus

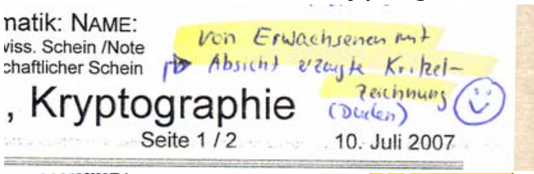
- moodle Kurs
- http://mystudy.uni-lueneburg.de/moodle2/

moodle •Einführung

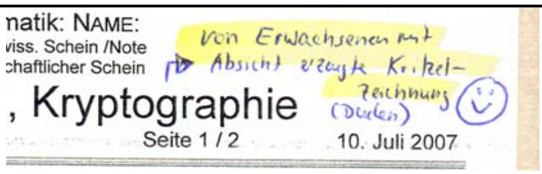
- Tutoren-Team mit Sprechstunden 12.216

Mo 14-16	Di 8-10	Mi 8-10	Do 8-10

Was ist moderne Kyptografie?


natik: NAME:
viss. Schein /Note
chaftlicher Schein
, Kryptographie
Seite 1 / 2
10. Juli 2007

Kryp|to|gra|fie, Kryp|to|gra|phie, die; -, ...ien (*Psychol.* absichtslos entstandene Kritzelzeichnung bei Erwachsenen; Disziplin der Informatik; *veraltet für* Geheimschrift)


natik: NAME:
viss. Schein /Note
chaftlicher Schein
, Kryptographie
Seite 1 / 2
10. Juli 2007

Was ist moderne Kryptografie?

- treibt das Rechnen auf die Spitze
- verwendet riesige Zahlen von 200 Stellen Länge
- werkelt mit Primzahlen
- erzeugt das Kryptogramm und die Schlüssel durch Rechnungen
- die Rechnungen laufen „modulo n“

Das wird jetzt erkärt:

Rechnen mit Resten, modulo-rechnen

$17 \bmod 10 = 7$

$17 \underset{10}{\equiv} 7$

Rechnen mit Resten, modulo-rechnen

$17 \bmod 10 = 7$

$17 \underset{10}{\equiv} 7$

$23 \underset{5}{\equiv} 3$

$2783 \underset{5}{\equiv} 3$

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

$113 \underset{3}{\equiv} 2$

$112 \underset{3}{\equiv} 1$

$114 \underset{3}{\equiv} 0$

$2^2 = 1$

$2^2 \underset{3}{\equiv} 1$

Rechnen mit Resten, modulo-rechnen

$17 \bmod 10 = 7$

$17 \underset{10}{\equiv} 7$

Teilt man 17 durch 10 bleibt der Rest 7

$\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, \ldots 9\}$

$8 + 9 \underset{10}{\equiv} 7 \qquad 8 \cdot 9 \underset{10}{\equiv} 2$

Rechnen modulo 10

Rechnen mit Resten, modulo-rechnen

Rechnen Modulo 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Excel

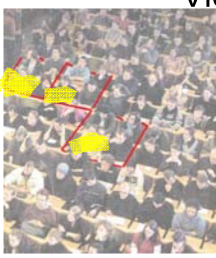
Rest(17;5)=2

Verknüpfungstafeln

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$

Vierer-Übung



Vier Studis bilden eine Gruppe

Rechts-Unten sagt den Modul an.

Kopfrechengeeignet

$+ \quad \cdot$

$-$ hoch

Jeder nennt eine Aufgabe.

Alle müssen alle 4 Aufgaben herausbekommen. Vergleichen!

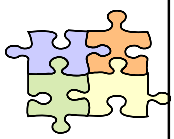
Beispiel $\mathbb{Z}_{100}$

$87 + 34 \qquad 23 \cdot 4$

$29 - 50 \qquad 12^2$

4 Minuten

mündlich



Negative Zahlen?

$\mathbb{Z}_{11} \qquad -9 \underset{11}{\equiv}$

Negative Zahlen?

$\mathbb{Z}_{11} \qquad -9 \underset{11}{\equiv} 11 - 9 \equiv 2.$

Probe $9 + 2 = 0$

2 ist additiv invers zu 9 im Modul $\mathbb{Z}_{11}$

Ebenso jetzt Sie

$-6 \underset{11}{\equiv}$

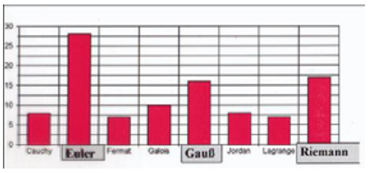
$-6 \underset{10}{\equiv}$

$-6 \underset{100}{\equiv}$

In $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots n-1\}$ hat jede Zahl a ein additiv Inverses $\bar{a}$ mit $a + \bar{a} = 0$.

Mathematik für alle

LEUPHANA UNIVERSITÄT LÜNEBURG



die acht bedeutendsten Mathematiker, gemessen an nach ihnen benannten Objekten

Bernhard Riemann

Abitur 1846 am Johanneum Lüneburg

Mathematik für alle

LEUPHANA UNIVERSITÄT LÜNEBURG

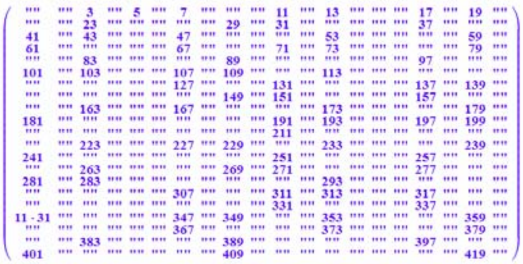
1 Million Dollar gibt die Clay-Stiftung

für den Beweis der **Riemann**schen Vermutung über die Primzahlverteilung

Dies ist eins von 7 offenen Problemen des 21. Jh.

Bernhard Riemann

Was ist denn mit den Primzahlen?



Sie sind nicht teilbar durch andere Zahlen, außer durch 1.

Primzahlen sind die Zahlen mit genau zwei Teilern.

Was ist denn mit den Primzahlen?

Sie spielen in der

Kryptografie

!!!!! die !!!!!

zentrale Rolle.

Sie sind nicht teilbar durch andere Zahlen, außer durch 1.

Primzahlen sind die Zahlen mit genau zwei Teilern.

Wie weist man p als Primzahl nach?

- Man teilt p durch alle kleineren Zahlen, wenn kein Rest bleibt, war p keine Primzahl.
- Man setzt etwas Überlegung ein und testet nur mit ungeraden Zahlen und nur bis etwa Wurzel aus p
- Man setzt mathematische Theorie ein und testet mit dem „Kleinen Satz von Fermat“:

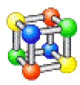
$$p \text{ prim} \Rightarrow a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$$

Aha! Rechnen im Modul p!

Kleiner Satz von Fermat

$$p \text{ prim} \Rightarrow a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$$

1601-1667



Potenzieren

Kleiner Satz von Fermat

p prim $\Rightarrow a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$

1601-1667

$2^6 \underset{7}{\equiv} 64 = 63+1 \underset{7}{\equiv} 1$

$\Rightarrow$ 7 könnte eine Primzahl sein

$2^5 \underset{6}{\equiv} 32 \underset{6}{\equiv} 2 \Rightarrow$ 6 kann nicht Primzahl sein.

Primzahl-Tests

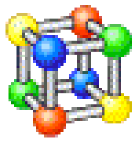
- Es gibt noch etliche pfiffige Primzahltests.
- Sie sind auch bei großen Zahlen bis 10^200 effektiv.
- Sie beruhen auf mathematischer Theorie
- Die tragenden Themen heißen
  - Zahlentheorie
  - Algebra
  - Theorie der komplexen Funktionen

8 Millionen Stellen

Die größte Primzahl: (im Jahr 2004 gefunden) $2^{25\,964\,951} - 1$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Wie lange dauert das Suchen bei großen Zahlen mit 200 Stellen?



„Einfach Durch-Suchen“ ist nicht effektiv möglich.

Darauf beruht die Sicherheit in der Kryptografie.

Eine alternative Methode ist nicht in Sicht.

Mathematiker und Informatiker haben da z.Z. keine Hoffnung

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Potenzen-Übung

$\mathbb{Z}^*_{13}$

Basis

Exponent

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1
3	1	8	1	12	8	8	5	5	1	12	5	12
4	1	3	3	9	1	9	9	1	9	3	3	1
5	1	6	9	10	5	2	11	8	3	4	7	12
6	1	12	1	1	12	12	12	12	1	1	12	1
7	1	11	3	4	8	7	6	5	9	10	2	12
8	1	9	9	3	1	3	3	1	3	9	9	1
9	1	5	1	12	5	5	8	8	1	12	8	12
10	1	10	3	9	12	4	4	12	9	3	10	1
11	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$10^{12} = 10^2 = 9$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$3^{100} = 3^{99+1} = 3^{99} \cdot 3 = 3^{3\cdot 33} \cdot 3 = (3^3)^{33} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$

$3^3 = 1 \qquad 9^4 = 1 \qquad \mathrm{ord}(9) = 4$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Potenzen: Ordnung eines Elementes

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1
3	1	8	1	12	8	8	5	5	1	12	5	12
4	1	3	3	9	1	9	9	1	9	3	3	1
5	1	6	9	10	5	2	11	8	3	4	7	12
6	1	12	1	1	12	12	12	12	1	1	12	1
7	1	11	3	4	8	7	6	5	9	10	2	12
8	1	9	9	3	1	3	3	1	3	9	9	1
9	1	5	1	12	5	5	8	8	1	12	8	12
10	1	10	3	9	12	4	4	12	9	3	10	1
11	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Der kleinste Exponent k, der $a^k = 1$ erfüllt, heißt Ordnung des Elementes a in diesem Modul (allg. Gruppe).

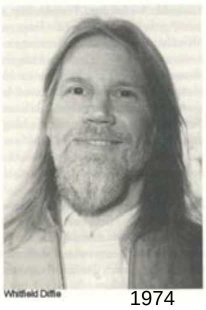
$\mathrm{ord}(5) = 4, \quad \mathrm{ord}(6) = 12, \ldots$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Informationen

- Sprechzeiten sind anders geworden:
- Mo 14, Mi 16, Do 8, Do 10, Do 16
- Raum ist anders geworden C 12.113:
- Übungsblätter sind noch verbesserungsfähig.
- Statistik für 3.Sem wird ein anderes Angebot gemacht, das nicht mit UF kollidiert.
- LBS- Soz.Päd.-Problem: sprechen Sie mich nachher an.

Wie kam es zur modernen Kryptografie?



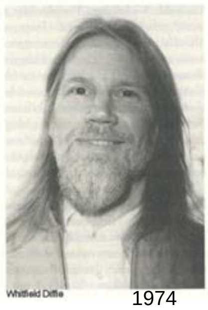
1974

lesen aus

Simon Singh: Codes, Wien, 2001

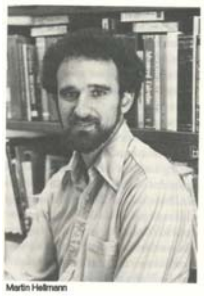
S. 215 ff (Auch Titel: Geheimschriften)

Diffie-Hellmann Verfahren



1974

Stanford University



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Diffie-Hellmann Schlüsselvereinbarung

Protokoll: Anton und Berta vereinbaren offen eine Primzahl p und eine Grundzahl g

Dann wählen sie sich geheim eine Zahl a, bzw. b, bilden

$g^a \underset{p}{\equiv} : \alpha$, bzw. $g^b \underset{p}{\equiv} : \beta$

und senden sich offen das Ergebnis zu.

Anton bildet $k_a :\underset{p}{\equiv} \beta^a$

Berta bildet $k_b :\underset{p}{\equiv} \alpha^b$

Diffie und Hellmann nennen ihr Verfahren "Schlüsselvereinbarung" und empfehlen nun die Verwendung eines symmetrischen kryptografischen Verfahrens.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Diffie-Hellmann Schlüsselvereinbarung

Protokoll: Anton und Berta vereinbaren offen eine Primzahl p und eine Grundzahl g 2

Dann wählen sie sich geheim eine Zahl a, bzw. b, bilden 13

5 3

$g^a \underset{p}{\equiv} : \alpha$, bzw. $g^b \underset{p}{\equiv} : \beta$

$2^5 \underset{13}{\equiv} 6$ $2^3 \underset{13}{\equiv} 8$

und senden sich offen das Ergebnis zu.

$\beta = 8$ $\alpha = 6$

Anton bildet $k_a :\underset{p}{\equiv} \beta^a$

$k_a = 8^5 = 8$

Berta bildet $k_b :\underset{p}{\equiv} \alpha^b$

$k_b \underset{13}{\equiv} 6^3 = 8$

Diffie und Hellmann nennen ihr Verfahren "Schlüsselvereinbarung" und empfehlen nun die Verwendung eines symmetrischen kryptografischen Verfahrens.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Diffie-Hellmann Schlüsselvereinbarung

Protokoll: Anton und Berta vereinbaren offen eine Primzahl p und eine Grundzahl g

Dann wählen sie sich geheim eine Zahl a, bzw. b, bilden $13 = p$ $g = 7$

$g^a \underset{p}{\equiv} : \alpha$ $a = 2$, bzw. $b = 5$ $g^b \underset{p}{\equiv} : \beta$

$7^2 \underset{13}{\equiv} 10$

$7^5 = 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7 \underset{13}{\equiv} 10 \cdot 10 \cdot 7 \equiv 9 \cdot 7 \equiv 11$

und senden sich offen das Ergebnis zu.

$\alpha = 10$

Anton bildet $k_a :\underset{p}{\equiv} \beta^a$ $\beta = 11$

Berta bildet $k_b :\underset{p}{\equiv} \alpha^b$

$k_a = 11^2 \equiv 121 \equiv 4$

$k_b = 10^5 = 99996 + 4 \equiv 4$

Diffie und Hellmann nennen ihr Verfahren "Schlüsselvereinbarung" und empfehlen nun die Verwendung eines symmetrischen kryptografischen Verfahrens.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Beweis der „Durchführbarkeit“, dass also das Verfahren stets klappt

$k_a :\underset{p}{\equiv} \beta^a$ $g^b \underset{p}{\equiv} : \beta$ $k_b :\underset{p}{\equiv} \alpha^b$ $g^a \underset{p}{\equiv} : \alpha$

$k_a = \beta^a = (g^b)^a = g^{ba} = g^{ab} = (g^a)^b = \alpha^b = k_b$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

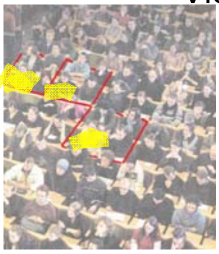
Beweis der „Durchführbarkeit“, dass also das Verfahren stets klappt

$k_a :\underset{p}{\equiv} \beta^a \qquad g^b \underset{p}{\equiv}: \beta \qquad k_b :\underset{p}{\equiv} \alpha^b \qquad g^a \underset{p}{\equiv}: \alpha$

$k_a = (g^b)^a = g^{ba} \qquad k_b = (g^a)^b = g^{ab}$

Also $k_a = g^{ba} = g^{ab} = k_b$

Vierer-Übung



Vier Studis bilden eine Gruppe

Rechts-Unten sagt eine Primzahl p an.

Links-Oben nennt eine Zahl g

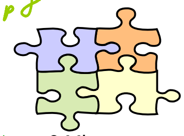
Die, die nebeneinander sitzen, spielen Anton, bzw. Berta.

$a \qquad b$

$\alpha \underset{p}{\equiv} g^a \qquad \beta \underset{p}{\equiv} g^b$

$\alpha \qquad \beta$

$k_a \underset{p}{\equiv} \beta^a \qquad k_b \underset{p}{\equiv} \alpha^b$



6 Minuten

Wie sieht das in der Realität aus?

Diffie-Hellmann-Verfahren, realisiert in MuPAD

- Das Grund Problem der „alten Kryptografie ist gelöst,
- Der Schüssel wird nicht ausgetauscht,
- sondern kryptografisch sicher vereinbart.
- Nun kann man mit dem One-Time-Pad sicher kommunizieren.

Das war nur der Anfang

Ronald Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman.

RSA-Verschlüsslung

Public-Key-Kryptografie

asymmetrisches Verfahren

lesen Singh, 231ff

Ein weites Feld

Public-Key-Verfahren

No-Key-Verfahren

Zero-Knowledge-Verfahren

Challenge-and-Response-Verfahren

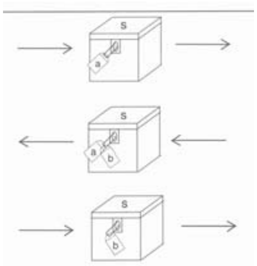


Bild 3.7: Shamir's No-Key-Protokoll

$s \equiv s^{aa'} \bmod p \quad \text{und} \quad s \equiv s^{bb'} \bmod p.$

Was ist nun mit der Scheckkarte?

Die PIN wird nicht zur Bank übertragen, sondern aus Kontonummer und Bankleitzahl berechnet.

Unterschriftsberechtigter:	HBCI mit PIN/TAN
Medium:	HBCI mit PIN/TAN
Konto:	Privatgiro - 00521133
BLZ:	24050110
PIN	*****

Was leistet die moderne Kryptografie?

- Geheimhaltung, sichere Kommunikation
- Echtheitsprüfungen (Authentikation)
  - der Nachrichten
  - von Personen
  - digitale Signatur
- Anonymität
  - Elektonisches Geld,
  - Elektronische Wahlen....

Wodurch wird moderne Kryptografie möglich?

Durch:

Mathematik

Zusammen mit Informatik und Technik

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Codierung

Haydn: Streichquartett op 54.3 aus Largo, Violine I

Codierung

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

EAN Europäische Artikelnummer

Ziffern 1 und 2 codieren das Hersteller-Land

Ziffer 2 bis 12 codieren Händler und Ware

Die letzte Ziffer ist eine Prüfziffer

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

EAN Europäische Artikelnummer

Ausländische Produkte

Holland 87
Österreich 90
Frankreich 31, 32, 33
USA 0...
Portugal 56
Chile 78
Deutschland 40, 42, 43
Italien 80
Spanien 84
Mexico 74
Großbritannien/Irland 50

8 711500 700445

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

EAN Europäische Artikelnummer

8 711500 700445

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

EAN Europäische Artikelnummer

8 711500 700445

·1 ·3 ·3

$8+21+1+3+5+0+0+21+0+0+4+12 = 75 + \text{Prüfziff} = 10\cdot n$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

EAN Europäische Artikelnummer

8 711500 700445

$\downarrow\cdot 1$ $\downarrow\cdot 3$ ...

5 passt

muss sein

$8+21+1+3+5+0+0+21+0+0+4+12 = 75 + \text{Prüfziffer} = 10\cdot n$

EAN

Zahlendreher werden meist gemerkt

8 711500 700445

drehen

$x \quad y \qquad y \cdot x$

$\downarrow\cdot 1 \quad \downarrow\cdot 3 \qquad \downarrow\cdot 1 \quad \downarrow\cdot 3$

$x+3y \underset{10}{\equiv} y+3x+$

$\Leftrightarrow\ 2y-2x \underset{10}{\equiv} 0 \iff 2\cdot(x-y) \underset{10}{\equiv} 0$

EAN

Zahlendreher werden meist gemerkt

aber nicht:

x	y
5	0
6	1
7	2
8	3
9	4

8 711500 700445

drehen

$x \quad y \qquad y \cdot x$

$\downarrow\cdot 1 \quad \downarrow\cdot 3 \qquad \downarrow\cdot 1 \quad \downarrow\cdot 3$

$x+3y \underset{10}{\equiv} y+3x+$

$\Leftrightarrow\ 2y-2x \underset{10}{\equiv} 0 \iff 2\cdot(x-y) \underset{10}{\equiv} 0$

ISBN veraltet

Zahlendreher wurden immer gemerkt

www.vieweg.de

ISBN 3-528-03215-4

9 783528 032159

EAN

3 5 2 8 0 3 2 1 5

$\downarrow\cdot 10 \ \downarrow\cdot 9 \ \downarrow\cdot 8 \ \downarrow\cdot 7 \ \ \downarrow\cdot 5$

$30+45+16+56+0+15+8+3+10+p \underset{11}{\equiv} 0$

$183+p \underset{11}{\equiv} 0$

ISBN veraltet

neu als EAN

Zahlendreher wurden immer gemerkt

www.vieweg.de

ISBN 3-528-03215-4

9 783528 032159

3 5 2 8 0 3 2 1 5

$\downarrow\cdot 10 \ \downarrow\cdot 9 \ \downarrow\cdot 8 \ \downarrow\cdot 7 \ \ \downarrow\cdot 5$

4 passt, denn

$183+4=187=110+77 \underset{11}{\equiv} 0$

$30+45+16+56+0+15+8+3+10+p \underset{11}{\equiv} 0$

$183+p \underset{11}{\equiv} 0$

EAN

4 0 0 3 2 7 3 1 0 3 8 6 3

4 0 0 3 2 7 3 1 0 3 8 6 3

0001101 0100111

Die erste Ziffer ist in der Abfolge AB.... codiert

z	erste	Code A	Code B	Code C
0	"AAAAAA"	"0001101"	"0100111"	"1110010"
1	"AABABB"	"0011001"	"0110011"	"1100110"
2	"AABBAB"	"0010011"	"0011011"	"1101100"
3	"AABBBA"	"0111101"	"0100001"	"1000010"
4	"ABAABB"	"0100011"	"0011101"	"1011100"
5	"ABBAAB"	"0110001"	"0111001"	"1001110"
6	"ABBBAB"	"0101111"	"0000101"	"1010000"
7	"ABABAB"	"0111011"	"0010001"	"1000100"
8	"ABABBA"	"0110111"	"0001001"	"1001000"
9	"ABBABA"	"0001011"	"0010111"	"1110100"

EAN

ABAABB
4 0 0 3 2 7 3 1 0 3 8 6 3

4 0 0 3 2 7 3 1 0 3 8 6 3

0100 111

000 1 0 0 1 0 1
11 1 1111

Code C

z	erste	Code A	Code B 2.	Code C
0	"AAAAAA"	"0001101" 1	"0100111" 1	"1110010"
1	"AABABB"	"0011001"	"0110011"	"1100110"
2	"AABBAB"	"0010011"	"0011011"	"1101100"
3	"AABBBA"	"0111101" 3.	"0100001"	"1000010"
4	"ABAABB"	"0100011"	"0011101"	"1011100"
5	"ABBAAB"	"0110001"	"0111001"	"1001110"
6	"ABBBAB"	"0101111"	"0000101"	"1010000"
7	"ABABAB"	"0111011"	"0010001"	"1000100"
8	"ABABBA"	"0110111"	"0001001"	"1001000"
9	"ABBABA"	"0001011"	"0010111"	"1110100"

Par = 1 Parität = 0

Die erste Ziffer ist in der Abfolge AB.... codiert

An der Parität kann die Leserichtung erkannt werden.

Fehlerkorrigierende Codes

Fehlerkorrigierende Codes

- Wir betrachten **binäre Codewörter** aus 0 und 1
- Die **Parität** eines Codewortes ist
  - 0, wenn das Wort eine gerade Anzahl 1 hat
  - 1, wenn das Wort eine ungerade Anzahl 1 hat
- Der **Hammingabstand** zweier Codewörter ist die Anzahl der unterschiedlich besetzten Stellen.

6A 0101111 p = 1
7A 0111011 p = 1
h = 2

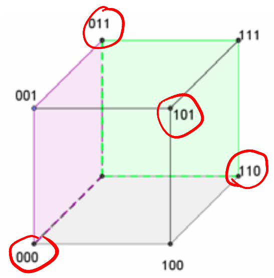
6B 0000101 p =
7B 0010001 p =
h =

6A 0101111
6B 0000101
h = 3

6C 1010000 p =
7C 1000100 p =
h =

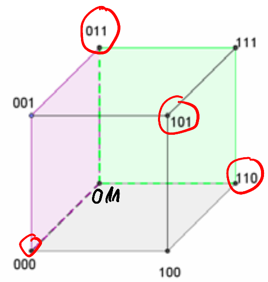
Fehlerkorrigierende Codes

- Wir betrachten binäre Codewörter mit 3 Bit.



Fehlerkorrigierende Codes

- Wir betrachten binäre Codewörter mit 3 Bit.



- 4 Wörter erlaubt,
- h=2

Der Code aus diesen 4 Wörtern kann Fehler erkennen, aber nicht korrigieren

Fehlerkorrigierende Codes

Platz			Info				Info f			
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0				0			
0	1	1	1	0	1	1	0			
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0				0			
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0				0			
				p=				p=		
				falls 0	0	0				
				dann richtig				Platz des Fehlers		
								falls		
								genau 1 F.		

Fehlerkorrigiende Codes

7 Bit + Parität.

Platz				Info						Info f				
0	0	1		1		0	0	1		1		0	0	1
0	1	0		0						0				
0	1	1		1		0	1	1		0				
1	0	0		1		1	0	0		1		1	0	0
1	0	1		0						0				
1	1	0		1		1	1	0		1		1	1	0
1	1	1		0						0				
			p=	0										
	oder			Z	p=						p=			
			P_{ges}	0			H							
					H=0				H =/= 0					
		Z=0			ok				wegwerfen					
		z=/= 0			F in p				genau ein Fehler in Platz H					

Fehlerkorrigierende Codes oder warum CD nicht knackt

Mathematik in unserer Welt: EAN , Barcode und ISBN

Europäische Artikelnummer und Internationale Standard-Buch-Nummer

www.uni-**lueneburg-de/mathe-lehramt** Anregung Wilfried Herget 1988, **Prof. Dr. Dörte Haftendorn 1998/00/05**

Die EAN hat 13 Ziffern. die ersten 12 werden abwechselnd mit 1 und 3 malgenommen, die Summe wird von der Prüfziffer zum nächsten Zehner ergänzt.

4	0	0	3	2	7	3	1	0	3	8	6	3
4	0	0	9	2	21	3	3	0	9	8	18	77

Im Barcode ist dieselbe Zahl verschlüsselt. Ursprünglich in Amerika entwickelt, war der Barcode nur 12 Ziffern lang. In Europa brauchte man eine Ziffer mehr. Darum wird die erste Ziffer als Codefolge in den nächsten sechs Ziffern versteckt.
Die erste Ziffer legt einen AB-Code fest. Nachfolgenden Ziffern 2 bis 7 werden dann entsprechend mit Code A oder Code B verschlüsselt. Die Ziffern 8 bis 13 werden mit Code C verschlüsselt. 1 ist ein schwarzer Strich, 0 ein heller Strich der Breite 1. Zur Gliederung werden lange Striche und in der Mitte noch zwei Zwischenräume eingefügt.

z	erste	Code A	Code B	Code C
0	"AAAAAA"	"0001101"	"0100111"	"1110010"
1	"AABABB"	"0011001"	"0110011"	"1100110"
2	"AABBAB"	"0010011"	"0011011"	"1101100"
3	"AABBBA"	"0111101"	"0100001"	"1000010"
4	"ABAABB"	"0100011"	"0011101"	"1011100"
5	"ABBAAB"	"0110001"	"0111001"	"1001110"
6	"ABBBAB"	"0101111"	"0000101"	"1010000"
7	"ABABAB"	"0111011"	"0010001"	"1000100"
8	"ABABBA"	"0110111"	"0001001"	"1001000"
9	"ABBABA"	"0001011"	"0010111"	"1110100"

Die ISBN hat 10 Ziffern. Die ersten 9 werden nacheinander mit 10,9,8,....2 malgenommen, die Summe wird von der Prüfziffer zum nächsten Elfer ergänzt. Die Ergänzung 10 wird als Prüfziffer X geschrieben.
Alternativ: Die ersten 9 Ziffern werden nacheinander mit 1,2,3,...,9 malgenommen, dann ist die Prüfziffer der Rest beim Teilen durch 11.

3	1	4	3	6	2	0	0	1	3	ISBN
30	9	32	21	36	10	0	0	2	140	Methode 1
3	2	12	12	30	12	0	0	9	80	Methode 2
121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	Elfer-Vielfache

Die EAN zu einer ISBN hat vorn die Ziffern 9 7 8 vorangestellt, die letzte Ziffer wird dann durch die EAN-Prüfziffer ersetzt.

9	7	8	3	1	4	3	6	2	0	0	1	4
9	21	8	9	1	12	3	18	2	0	0	3	86

Graphentheorie

Gibt es in Königsberg einen Spaziergang, bei dem man jede der sieben Pregelbrücken genau einmal überquert?

Königsberger Brückenproblem

Im Jahre 1736

Leonhard Euler löste das Problem allgemein

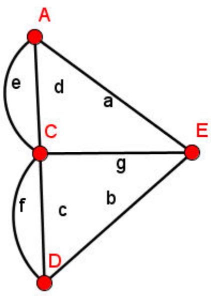
Gibt es in Königsberg einen Spaziergang, bei dem man jede der sieben Pregelbrücken genau einmal überquert?

Was ist ein Graph?

Im Jahre 1736

Leonhard Euler löste das Problem allgemein

und begründete damit die Graphentheorie



Jede Kante gehört zu genau zwei Ecken.

Ein Graph besteht aus einer Eckenmenge und einer Kantenmenge

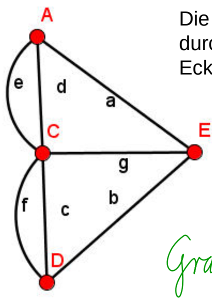
$$G=(E,K)$$

Gundbegriffe

Im Jahre 1736

Leonhard Euler löste das Problem allgemein

Der **Grad einer Ecke** ist die Anzahl der abgehenden Kanten.



Die **Adjazenz-Matrix** gibt an, durch wie viele Kanten die Ecken verbunden sind.

	A	C	E	D
A	0	2	1	0
C	2	0	1	2
E	1	1	0	1
D	0	2	1	0

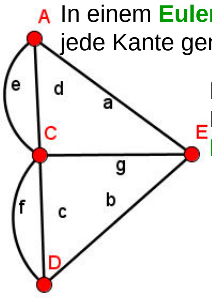
↓+

Grad 3 5 3 3

Eulersche Begriffe

Im Jahre 1736

Leonhard Euler löste das Problem allgemein



In einem **Eulerschen Weg** kommt jede Kante genau einmal vor.

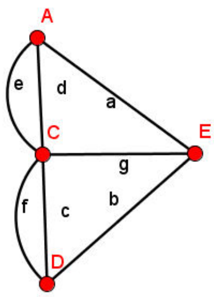
Ein geschlossener Eulerscher Weg heißt **Eulerscher Kreis**.

Eulers Lösung:

Im Jahre 1736

Leonhard Euler löste das Problem allgemein

Im Königsberg-Graphen gibt es keinen Eulerschen Kreis.

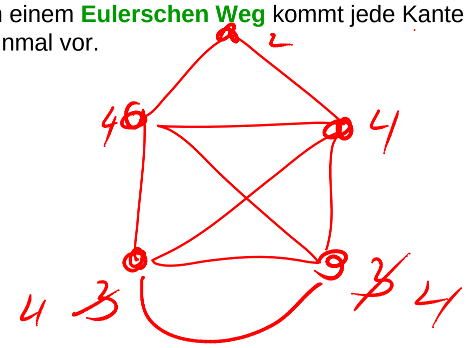


Eulerscher Satz:

Einen Eulerschen Kreis gibt es genau dann, wenn alle Ecken einen geraden Grad haben.

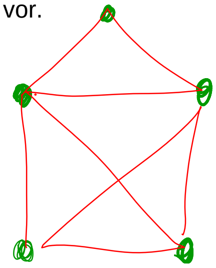
Das Haus des Nikolaus

In einem **Eulerschen Weg** kommt jede Kante genau einmal vor.



Das Haus des Nikolaus

In einem **Eulerschen Weg** kommt jede Kante genau einmal vor.



Grad:

Eulerscher Satz:

Einen Eulerschen Weg gibt es genau dann, wenn genau zwei Ecken einen ungeraden Grad haben.

Graphen in unserer Welt

Graphen in unserer Welt

Mit Graphen schafft man sich ein

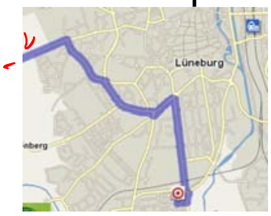
Modell der Wirklichkeit,

das einen bestimmten Zusammenhang deutlich macht und andere Aspekte der Wirklichkeit ausblendet.

Die geometrische Lage und Form spielt bei Graphen eigentlich gar keine Rolle.

Bei Streckenplänen wird allerdings ganz grob die gegenseitige Lage wiedergegeben.

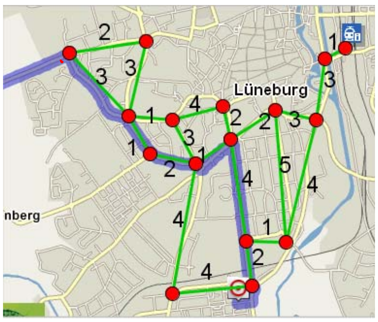
Routenplaner und Graphen



Die Routenplaner arbeiten mit

bewerteten Graphen

Routenplaner und Graphen

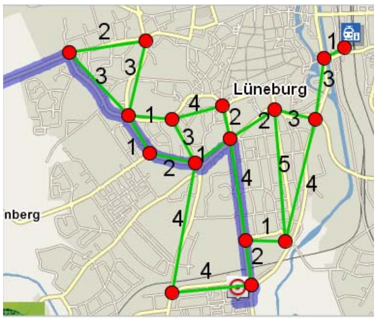


Die Routenplaner arbeiten mit bewerteten Graphen

Die Bewertung kann Entfernung, Zeit, Kosten .... bedeuten.

Erstmal leichtere Probleme:

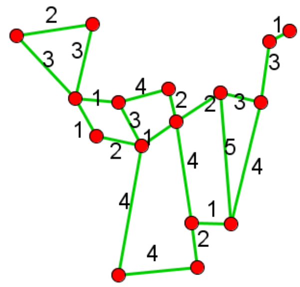
Stadtplanung und Graphen



Für das Stadt-bauamt kann

die Bewertung Baukosten bedeuten.

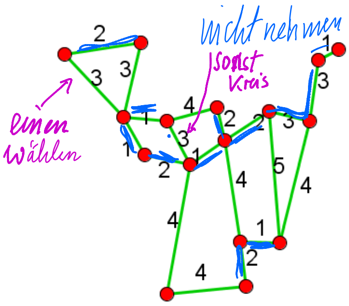
Optimierung und Graphen



Bewertung Baukosten

Straßenbelag erneuern, so dass jede Kreuzung auf neuem Belag erreichbar ist.

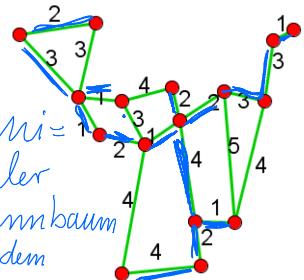
Optimierung und Graphen



Bewertung Baukosten

Straßenbelag erneuern, so dass jede Kreuzung auf neuem Belag erreichbar ist.

Optimierung und Graphen

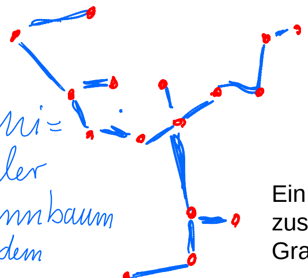


Bewertung Baukosten

Straßenbelag erneuern, so dass jede Kreuzung auf neuem Belag erreichbar ist.

Mini-maler Spannbaum mit dem Greedy-Algoritmus

Optimierung und Graphen



Bewertung Baukosten

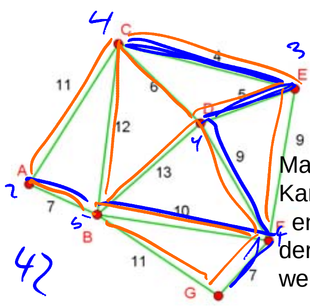
Straßenbelag erneuern, so dass jede Kreuzung auf neuem Belag erreichbar ist.

Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreise.

Mini-maler Spannbaum mit dem Greedy-Algoritmus

greedy=gierig

Optimierung und Graphen



Bewertung Baukosten

Leitungsnetz verlegen, so dass jeder Knoten erreicht wird. Minimiere die Baukosten.

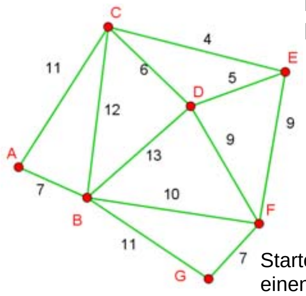
Greedy-Algorithmus

Markiere solange die billigsten Kanten, solange kein Kreis entsteht. Mache dann mit der nächst teureren Kante weiter.

greedy=gierig

Übrigens: gibt es hier einen Eulerschen Weg?

Minimalen Weg zwischen zwei Ecken



Das ist das Routenplaner-Problem. Es ist ähnlich, aber schwerer zu lösen.

Das schafft der Dijkstra-Algorithmus.
ij=ei

Andeutung für Weg von B nach E:
Starte bei B, und baue langsam einen minimalen Baum auf, solange bis alle Ecken einbezogen sind.

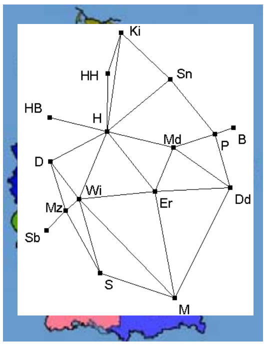
Niederl. Mathematiker E.Dijkstra, 1960

Landkarten färben

Wie viele Farben braucht man, wenn benachbarte Länder verschieden gefärbt sein sollen?

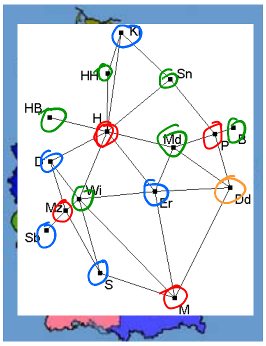
Modellierung des Problems mit Graphen:

Landkarten färben mit Graphentheorie



Wie viele Farben braucht man, wenn benachbarte Hauptstädte verschieden gefärbt sein sollen?

Landkarten färben mit Graphentheorie

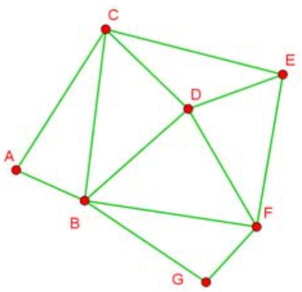


Wie viele Farben braucht man, wenn benachbarte Hauptstädte verschieden gefärbt sein sollen?

Vier-Farben-Satz
Es reichen immer vier Farben

Erst 1976 mit Computereinsatz bewiesen (Appel, Haken)

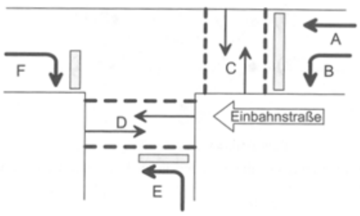
Eckenfärbung von Graphen



Die Ecken sollen so gefärbt werden, dass benachbarte Ecken verschiedene Farben haben

Achtung: Der 4-Farbensatz gilt nur für Graphen ohne Kantenkreuzungen.

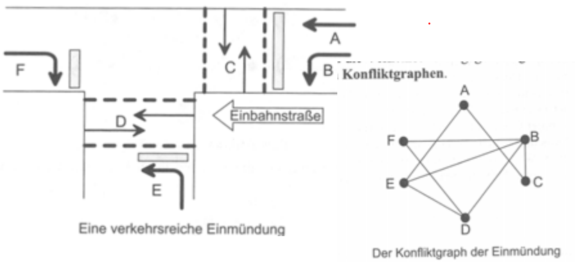
Konflikt-Graphen



Eine verkehrsreiche Einmündung

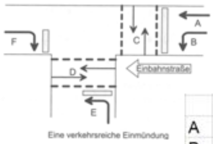
Die Verkehrsströme werden Ecken.
Wenn zwei in Konflikt geraten, werden sie durch eine Kante verbunden.

Konflikt-Graphen



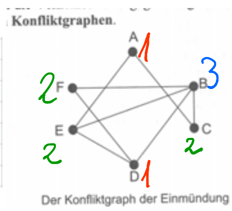
Die Verkehrsströme werden Ecken.
Wenn zwei in Konflikt geraten, werden sie durch eine Kante verbunden.

Konflikt-Graphen

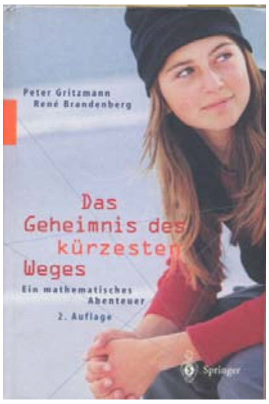


Adjazenzmatrix dazu

	A	B	C	D	E	F
A			x		x	
B			x	x	x	x
C	x	x				
D		x			x	x
E	x	x		x		
F		x		x		



Die Verkehrsströme werden Ecken.
Wenn zwei in Konflikt geraten, werden sie durch eine Kante verbunden.

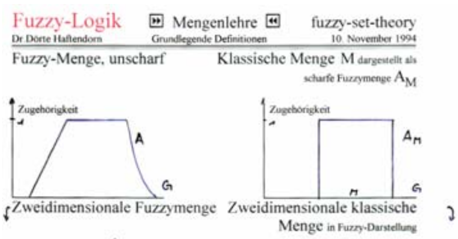


Graphen-Theorie

ist eins der spannendsten und dynamischsten mathematische Themen zur Zeit.

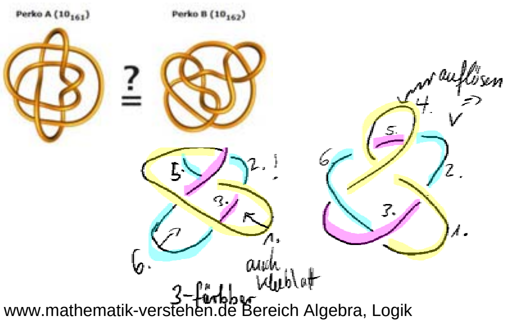
Fuzzy-Logik

„weiche Logik“



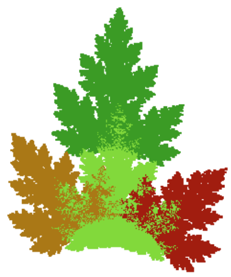
www.mathematik-verstehen.de Bereich Algebra, Logik

Knotentheorie



www.mathematik-verstehen.de Bereich Algebra, Logik

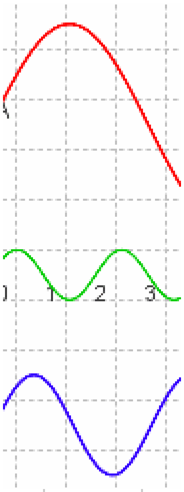
Fraktale, Chaostheorie

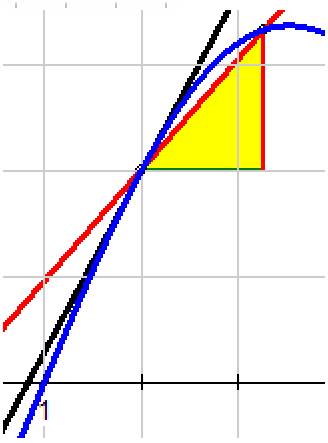


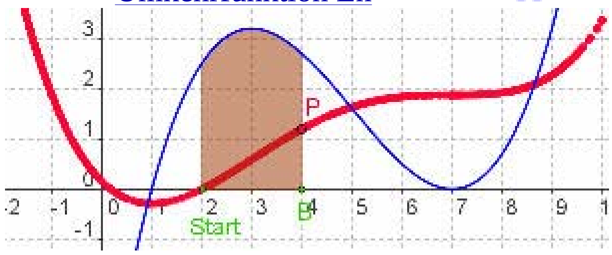
www.mathematik-verstehen.de Bereich Fraktale

Funktionen als zentrales Werkzeug

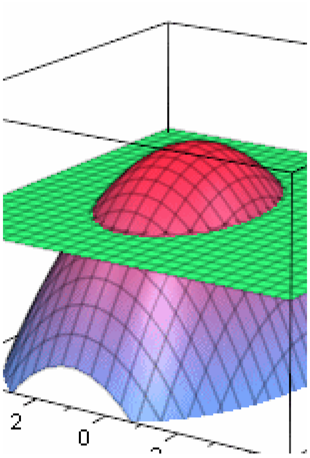
Für das eigene Ausprobieren installieren Sie einmal GeoGebra (free) von www.geogebra.org und laden sich die *.ggb - Dateien jeweils herunter.





- Funktionen-Grundtypen
- **Vorlesung 5: Funktionen Einführung, Mathematik und Sprache, Potenzfunktionen** pdf *.ppt
- Potenzfunktionen *.ggb
  Arbeits-Datei dazu für MuPAD-Interessierte
- **Vorlesung 6: Sinus und Kosinus, Exponentialfuktionen** pdf *.ppt
- Sinus-Erzeugung mit den Einheitskreis *.ggb
  Sinus und Kosinus *.ggb
  Exponentialfunktion *.ggb
- **Vorlesung 7: Umkehrfkt. Funktionen-Bauhof** pdf *.ppt
- Basteln mit Funktionen
  - Funktionen-Bausteine in allen Lagen
  - Stecken und Stauchen von Funktionen *.ggb
  - Summen von Funktionen, + und - *.ggb
  - Produkte von Funktionen, * und / *.ggb
  - Verkettung von Funktionen *.ggb
  - Umkehrfunktion *.ggb
    Umkehrfunktion Ln *.ggb
- 

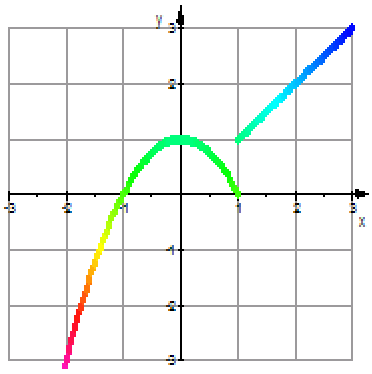
  Vorlesung 8: Infinitesimales pdf *.ppt
- Integrieren, was heißt das?
  - Integral aus dem Flächenproblem, Riemannsummen *.ggb
  - Integral pur zum Experimentieren mit der Funktion und den Grenzen *.ggb
  - Integralfunktion= Teppichabroll-Fkt. *.ggb
- Ableiten, was heißt das?
  - Tangentensteigung aus Sekantensteigung entstehen lassen *.ggb
  - Ableitung enstehen lassen *.ggb
  - **Vorlesung 9: Polynome, Beginn Optimierung** pdf *.ppt
- Polynome, mehrfache Nullstellen
  Vieta und die mehrfachen Nullstellen *.ggb
- Funktionen 3D (drei de, oh je)



3D-Verstehen, 3D-Optimieren html pdf mn
Datei **mit** den MuPAD-Befehlen html pdf mn

- War's das nun mit den Funktionen?
  Hier im "Mathematik für alle" haben wir alle wichtigen Funktionenklassen angesprochen.
  Allerdings ergibt sich Verkettung der Bausteine noch eine große Vielfalt, die wir hier nicht vertieft haben.
  Auch Quotienten aus Funktionen und deren Eigenschaften haben hier außen vor gelassen
- Nützt das? Passt das? Reicht das?
  Brunnen-Parabeln A *.ggb
  Dass Funktionen nützlich sind, ist wohl klar geworden.
  Für ein grundlegendes Verständnis reicht das auch.
  Menschen, die in Ihrem Beruf Mathematik brauchen, werden noch kräftig vertiefen müssen.

- Klar, man kann Funktionen auch stückweise definieren. Gerade in der Wirtschaft kann eine Funktion oft nicht "bis ins Unendliche" gelten. Von einem gewissen Punkt an sind andere Bedingungen bestimmend.



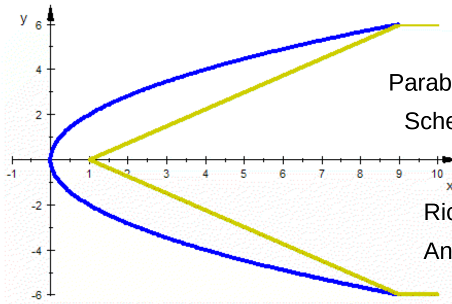
MATHEMATIK-VERSTEHEN

Weiterführungen, "Steinbruch" für das völlig neue Bauwerk "Mathematik für alle".

- Funktionen und Graphen
- Extremwert-Aufgaben
- Werkzeuge der Mathematik

test

Funktionen als zentrales Werkzeug



Parabol-Spiegel
Scheinwerfer

Richtfunk
Antenne

Gliederung: Mathematik für alle

- Moderne Mathematik
  - Werkzeuge für Mathematik
- Funktionen als zentrales Werkzeug
  - Beweise und Strukturen
- Optimierung als Ziel
  - Mathematik und Gesellschaft
- Numerik findet Lösungen

Mathematik und Sprache

- formale Sprache
  - Mathematiker unter sich, M.-Bücher
- verbale Sprache mit Exaktheitsanspruch
  - Mathematik in anderen Wissenschaften
- offene aber treffende verbale Sprache
  - Ziel von allg. Mathematik-Lehre
- visuell unterstützte Sprache
  - Basis für das Lehren
- Sprache des Lernens und Herantastens

Mathematik und Sprache am Beispiel
Eine Funktion ist stetig im Punkt B=(a,b)

- formale Sprache
- verbale Sprache mit Exaktheitsanspruch

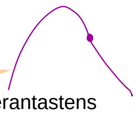
Für alle Epsilon größer Null gibt es ein Delta größer Null so, dass für alle x aus einer Delta-Umgebung von a die Funktionswerte in einer Epsilon-Umgebung von b liegen.

- offene aber treffende verbale Sprache

Wenn die x-Werte von beiden Seiten an a heranrücken, dann rücken die Funktionswerte beliebig dicht an b heran.

- visuell unterstützte Sprache

Man kann dies in einem Zug zeichnen.

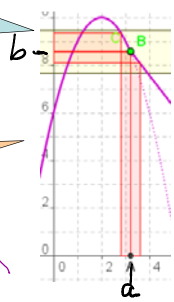


- Sprache des Lernens und Herantastens

Mathematik und Sprache am Beispiel
Eine Funktion ist stetig im Punkt B=(a,b)

- formale Sprache $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \forall x \in U_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(b)$
- verbale Sprache mit Exaktheitsanspruch

Für alle Epsilon größer Null gibt es ein Delta größer Null so, dass für alle x aus einer Delta-Umgebung von a die Funktionswerte in einer Epsilon-Umgebung von b liegen.

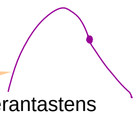


- offene aber treffende verbale Sprache

Wenn die x-Werte von beiden Seiten an a heranrücken, dann rücken die Funktionswerte beliebig dicht an b heran.

- visuell unterstützte Sprache

Man kann dies in einem Zug zeichnen.



- Sprache des Lernens und Herantastens

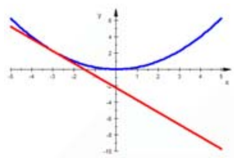
Aufgabe von „Mathematik für alle“

ist es

Funktionen als zentrales Werkzeug

begreifbar zu machen.

Mit visueller Unterstützung sollen Sie die Funktionen-Welt ordnen und gliedern.



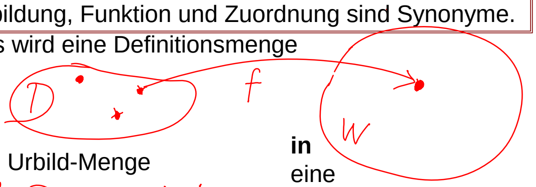
Sie sollen die tragenden Konzepte verstehen und einen Eindruck vom Nutzen bekommen.

Berechnungen, und Vertiefungen folgen in einigen Fachrichtungen später.

Was ist überhaupt eine Funktion?

Abbildung, Funktion und Zuordnung sind Synonyme.

Es wird eine Definitionsmenge



Urbild-Menge

$f: D \longrightarrow W$

in eine Wertemenge abgebildet / Bildmenge

und zwar auf eindeutige Weise.

d.h. jedes Urbild hat ein Bild, aber auch nur eins.

d.h. jedes Urbild hat genau ein Bild.

Ausschärfung der Begriffe

Abbildung, Funktion und Zuordnung sind fast Synonyme.

Abbildung verwendet man allgemein, im Besonderen aber in der Geometrie: Spiegelung, Drehung, Scherung, Projektion....

Zuordnung nimmt den Vorgang des Zuordnens und die einzelnen Objekte stärker in den Blick: den Waren sind Preise zugeordnet, jedem Konto eine PIN,... Schule bis Klasse 8

Funktion nimmt die Veränderung stärker in den Blick: z.B. der Druck ist eine Funktion der Temperatur. „y ist eine Funktion von x"

„y ist ein Funktion von x"

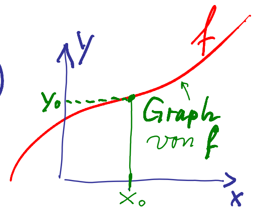
Wir betrachten nun erstmal den wichtigen Spezialfall, bei dem die reellen Zahlen in sich abgebildet werden.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f: x \longrightarrow y = f(x)$

Stelle, Abszisse, x-Wert, Einsetzung, Argument, unabh. Variable

Wert, Ordinate, y-Wert, Funktionswert, abhängige Variable



Die Funktion heißt **f**

Funktionsgleichung y = f(x)

Grundtyp Potenzfunktion

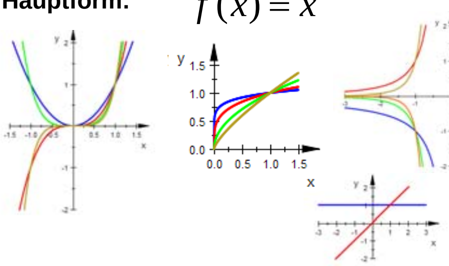
Hauptform: $f(x) = x^k$

GeoGebra

Funktionsgleichung y = f(x)

Grundtyp Potenzfunktion

Hauptform: $f(x) = x^k$

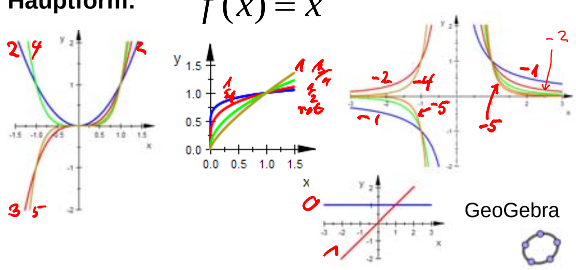


GeoGebra

Funktionsgleichung y = f(x)

Grundtyp Potenzfunktion

Hauptform: $f(x) = x^k$



GeoGebra

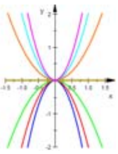
Funktionsgleichung y = f(x)

Variationen in Lage und Form

Hauptform: $f(x)=x^k$

in gestreckter Form
= wie in anderen Maßstab

$f(x)=t\,x^k$



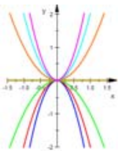
Funktionsgleichung y = f(x)

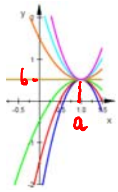
Variationen in Lage und Form

Hauptform: $f(x)=x^k$

in gestreckter Form
= wie in anderen Maßstab

$f(x)=t\,x^k$

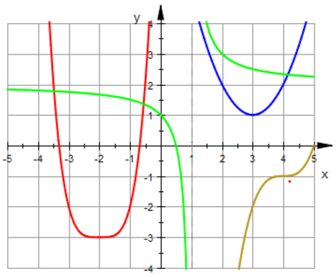




auf (a,b) verschoben $f(x)=t(x-a)^k+b$

Funktionsgleichung y = f(x)

Übung mit Potenzfunktionen

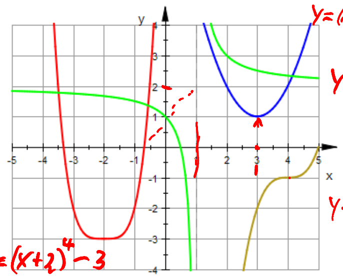


Funktionsgleichung y = f(x)

Übung mit Potenzfunktionen

$y=(x-3)^2+1$

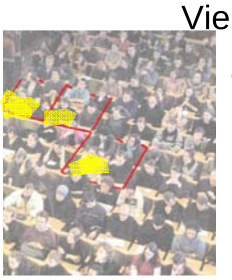
$y=(x-1)^{-1}+2$



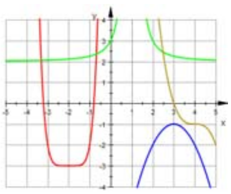
$y=(x-4)^3-1$

$y=(x+2)^4-3$

Vierer-Übung

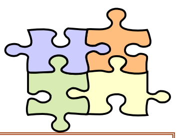


Erklären Sie sich hier die Gleichungen

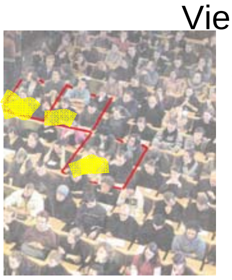


Die, die nebeneinander sitzen, skizzieren 3 Potenzfunktionen. Die beiden anderen müssen die Funktionsgleichung herausbekommen

6 Minuten

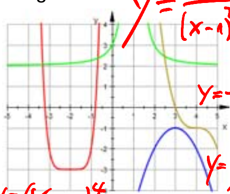


Vierer-Übung



Erklären Sie sich hier die Gleichungen

$y=\frac{1}{(x-1)^2}+2$



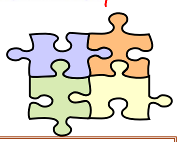
$y=-(x-4)^3-1$

$y=-(x-3)^2-$

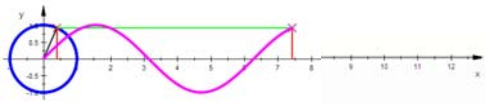
$y=(x+2)^4-3$

Die, die nebeneinander sitzen, skizzieren 3 Potenzfunktionen. Die beiden anderen müssen die Funktionsgleichung herausbekommen

6 Minuten



Funktionen als zentrales Werkzeug



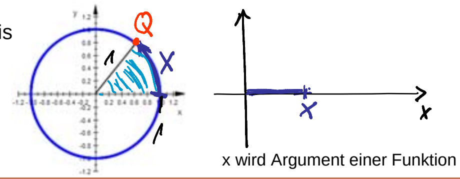
Sinusfunktion

Die Winkel-Funktionen

Der Punkt Q läuft im Einheitskreis vom Start (1/0).
(mathematisch positiv = gegen die Uhr)

Den von Q zurückgelegten Weg x nennt man auch „das Bogenmaß des Winkels“, um den sich Q gedreht hat.
Kurz: x ist der Winkel im Bogenmaß

Einheitskreis



x wird Argument einer Funktion

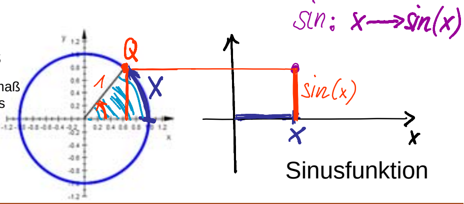
Die Sinus-Funktion

Dem Winkel x wird nun die Ordinate von Q zugeordnet.

Die Funktion, die das leistet, heißt Sinus-Funktion.

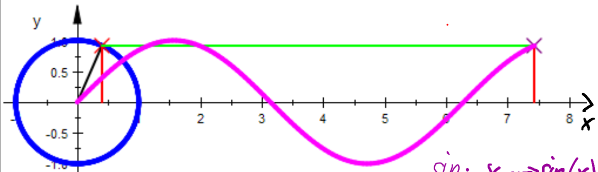
sin: x ⟶ sin(x)

Einheitskreis
x = Winkel im Bogenmaß
= Länge des Bogens
im Einheitskreis



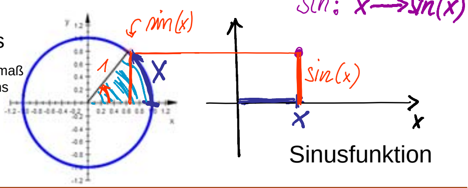
Sinusfunktion

Die Sinus-Funktion



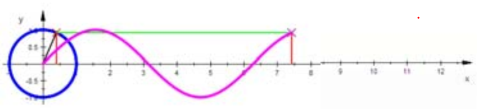
sin: x ⟶ sin(x)

Einheitskreis
x = Winkel im Bogenmaß
= Länge des Bogens
im Einheitskreis

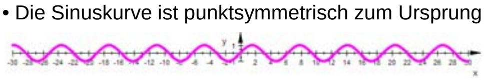


Sinusfunktion

Eigenschaften der Sinus-Funktion



- Die Sinus-Funktion ist periodisch.
- Die Periode ist 2π .
- Die Sinuswerte liegen zwischen -1 und + 1.
- Die Sinusbögen sind symmetrisch.
- Die Sinuskurve ist punktsymmetrisch zum Ursprung



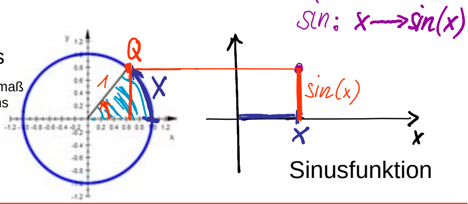
Die Sinus-Funktion

Dem Winkel x wird nun die Ordinate von Q zugeordnet.

Die Funktion, die das leistet, heißt Sinus-Funktion.

sin: x ⟶ sin(x)

Einheitskreis
x = Winkel im Bogenmaß
= Länge des Bogens
im Einheitskreis



Sinusfunktion

Die Kosinus-Funktion

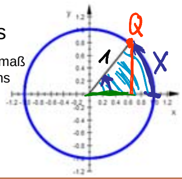
Dem Winkel x wird nun die ~~Ordinate~~ von Q zugeordnet.
Abszisse

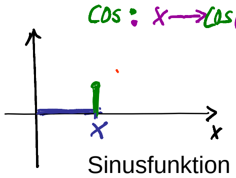
Die Funktion, die das leistet, heißt ~~Sinus~~-Funktion.
Kosinus

$\cos: x \rightarrow \cos(x)$

Einheitskreis

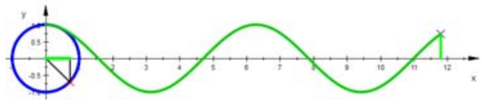
x = Winkel im Bogenmaß
= Länge des Bogens
im Einheitskreis



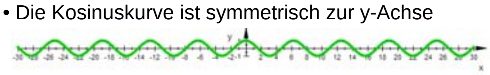


Sinusfunktion

Eigenschaften der Kosinus-Funktion

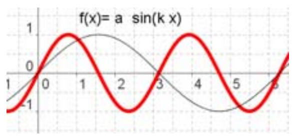


- Die Kosinus-Funktion ist periodisch.
- Die Periode ist 2π .
- Die Kosinuswerte liegen zwischen -1 und + 1.
- Die Kosinusbögen sind symmetrisch.
- Die Kosinuskurve ist symmetrisch zur y-Achse

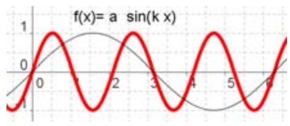


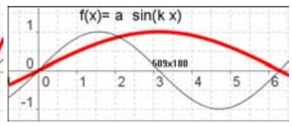
Sinus strecken und stauchen

Funktionen strecken und stauchen

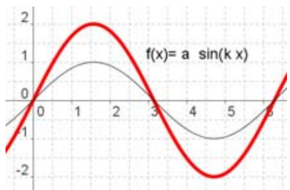


Ein Faktor direkt beim x sorgt für waagerechtes Strecken und Stauchen.

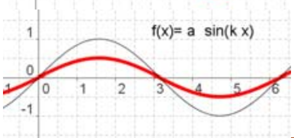


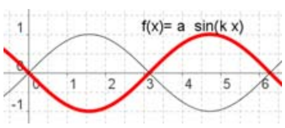


Funktionen strecken und stauchen

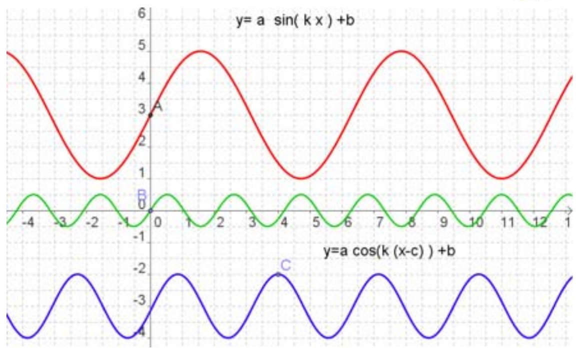


Ein Faktor vor dem Funktionsterm sorgt für senkrechtes Strecken und Stauchen.





Funktionen variieren

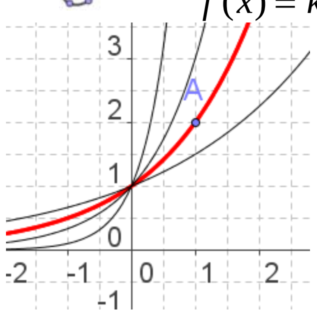


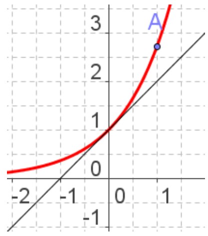
Exponentialfunktion

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Exponentialfunktion

$$f(x) = k^x$$





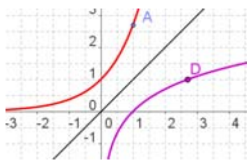
$$f(x) = e^x$$

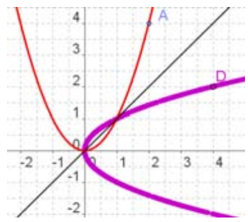
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Umkehrfunktion zu mancher Funktion

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

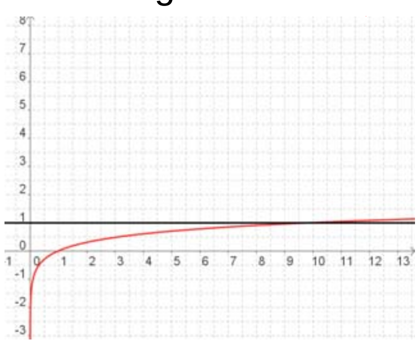
Exponentialfunktion





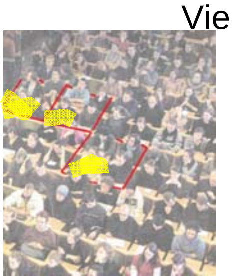
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Wie langsam wächst der Logarithmus?

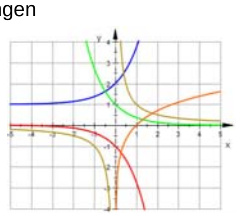


Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Vierer-Übung

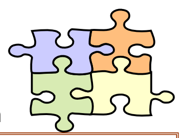


Erklären Sie sich hier die Gleichungen



Die, die nebeneinander sitzen, skizzieren 3 Potenzfunktionen. Die beiden anderen müssen die Funktionsgleichung herausbekommen

6 Minuten



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Ein Blick ----- Einblick

Wie wir in „Mathematik für alle“ die Welt der Mathematik sehen

Ein Weg ist gangbar vorbereitet

Wie wir in „Mathematik für alle“ die Welt der Mathematik sehen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Die Welt der Umkehrfunktionen

$y = \sqrt{x}$ $\qquad y = \ln(x)$

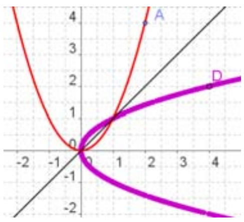
$y = \arcsin(x)$

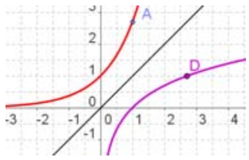
.....

$y = \sqrt[n]{x}$ $\qquad y = \log_a(x)$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Umkehr-Fragen
Umkehr-Funktionen
Umkehr-Relationen





Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

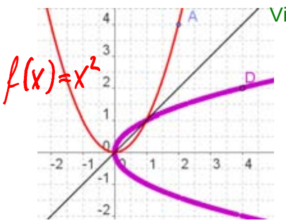
Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2?

Antwort: 4 ist der Wert, f(2)=4

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f hat den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, f(+2)=4 und f(-2)=4



Visualisierung der Umkehrfrage:

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

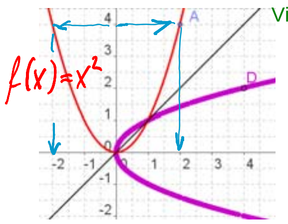
Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2?

Antwort: 4 ist der Wert, f(2)=4

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f hat den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, f(+2)=4 und f(-2)=4



Visualisierung der Umkehrfrage:

Gehe von der y-Achse zur Kurve und dann zur x-Achse

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

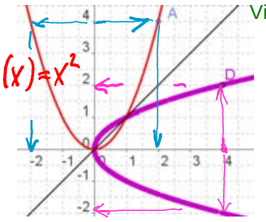
Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2?

Antwort: 4 ist der Wert, f(2)=4

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f hat den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, f(+2)=4 und f(-2)=4

$f(x)=x^2$



Visualisierung der Umkehrfrage:

I Gehe von der y-Achse zur Kurve und dann zur x-Achse

oder

II Gehe von der x-Achse zum Graphen der an der Winkel halbierenden gespiegelten Kurve und dann zur y-Achse. Es ist die Umkehrrelation.

oder $x=y^2$

Dies ist hier **keine** Funktion. Der Wert ist nicht eindeutig bestimmt.

Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

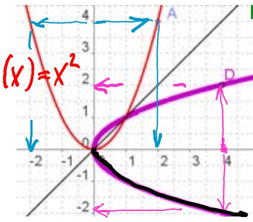
Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2?

Antwort: 4 ist der Wert, f(2)=4

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f hat den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, f(+2)=4 und f(-2)=4

$f(x)=x^2$



Formalisierung der Umkehrfrage:

Bilde (hier stückweise) die Umkehrfunktion

$g(4)=\sqrt{2}$

$$g(x)=\sqrt{x}$$

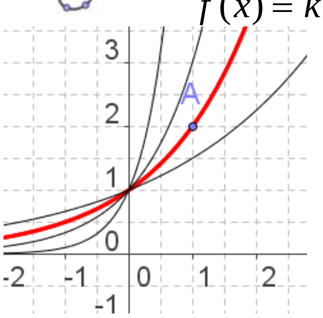
$$h(x)=-\sqrt{x}$$

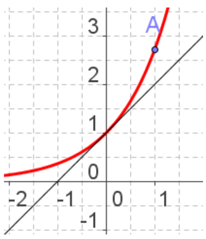
$h(4)=-2$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Exponentialfunktion

$$f(x)=k^x$$





$$f(x)=e^x$$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

die Exponentialfunktion

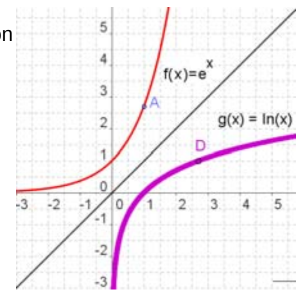
$$f(x)=e^x$$

e - Funktion

Eulersche e-Funktion

$f(1)=e$

$f(0)=1$



der natürliche Logarithmus

die ln-Funktion

der ln

$\ln(e)=1$

$\ln(1)=0$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

die Exponentialfunktion

$$f(x)=e^x \qquad e^{\ln(x)}=x$$

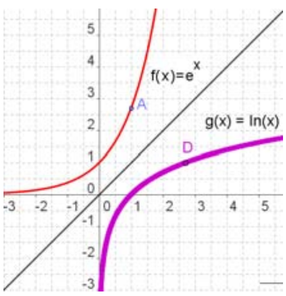
$\ln(e^x)=x$

e - Funktion

Eulersche e-Funktion

$f(1)=e$

$f(0)=1$



der natürliche Logarithmus

die ln-Funktion

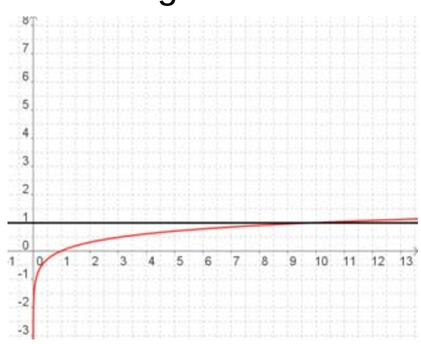
der ln

$\ln(e)=1$

$\ln(1)=0$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Wie langsam wächst der Logarithmus?



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Die Welt der Umkehrfunktionen

$y = \sqrt{x}$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$(\sqrt{x})^2 = x$

$y = \arcsin(x)$

$\sin(\arcsin(x)) = x$

$\arcsin(\sin(x)) = x$

für Hauptwerte

für $x > 0$

$y = \ln(x)$

$\ln(e^x) = x$

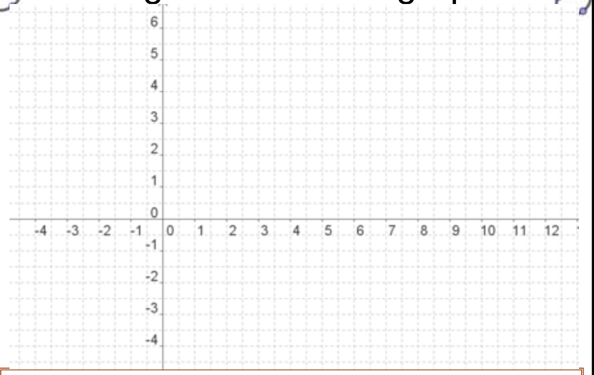
$e^{\ln x} = x$

$y = \sqrt[n]{x}$

$\sqrt[n]{x^n} = |x|$

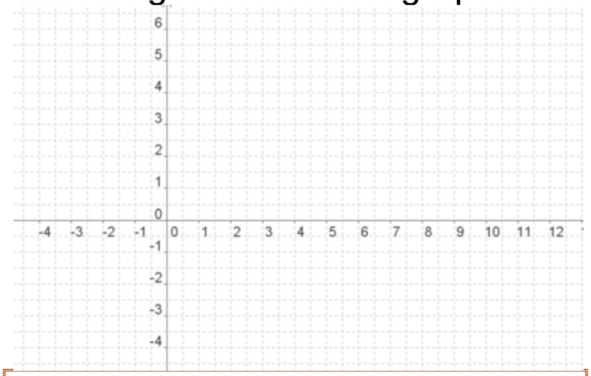
$y = \log_a(x)$

Übung mit Funktionsgraphen



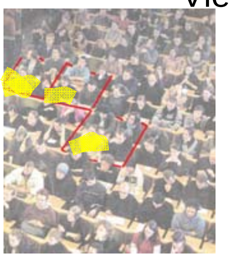
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Übung mit Funktionsgraphen

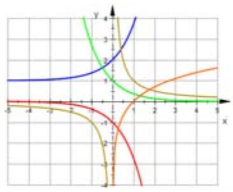


Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

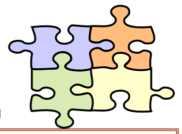
Vierer-Übung



Erklären Sie sich hier die Gleichungen



Die, die nebeneinander sitzen, skizzieren 3 Potenzfunktionen. Die beiden anderen müssen die Funktionsgleichung herausbekommen



6 Minuten

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Funktionsgleichung y = f(x)

Grundtypen

GeoGebra

Potenzfunktion

$f(x) = x^k$ $\quad f^{-1} = g$

Wurzelfunktion

$g(x) = \sqrt[k]{x}$

Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$ $\quad f^{-1} = g$

Logarithmus

$g(x) = \ln(x)$

Trigonometrische Funktion

$f(x) = \sin(x)$ $\quad f^{-1} = g$

Arcus-Funktion

$g(x) = \arcsin(x)$

$= \text{INV}\sin(x)$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Funktionen - Bauhof

- Strecken parallel zur y–Achse (Faktor vor dem Fkt-Term)
- Strecken parallel zur x–Achse (Faktor vor dem x-Term)
- Verschieben parallel zur y–Achse (+c hinter dem Fkt-Term)
- Verschieben parallel zur x–Achse (- a hinter dem x-Term)
- Bilden der Umkehrfunktion

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

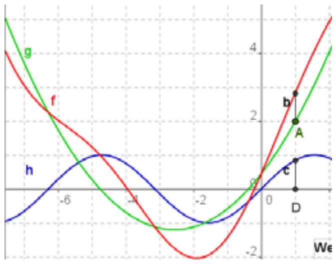
Funktionen - Bauhof

- Strecken parallel zur y–Achse (Faktor vor dem Fkt-Term)
- Strecken parallel zur x–Achse (Faktor vor dem x-Term)
- Verschieben parallel zur y–Achse (+c hinter dem Fkt-Term)
- Verschieben parallel zur x–Achse (- a hinter dem x-Term)
- Bilden der Umkehrfunktion
- \+ Summe zweier Funktionen, ebenso Differenz –
- • Produkt zweier Funktionen, ebenso Quotient
- o Verkettung zweier Funktionen, d.h. ineinander einsetzen hintereinander ausführen

Funktionen - Bauhof

- Summe zweier Funktionen, ebenso Differenz

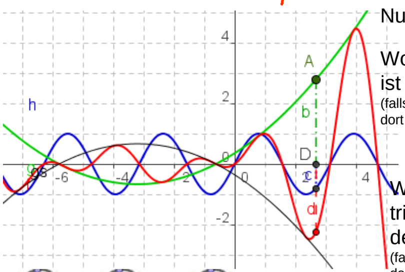
$f(x) = g(x) + h(x)$



Wo ein Summand 0 ist, kommt der andere Summand heraus.

Funktionen - Bauhof

- Produkt zweier Funktionen $f(x) = g(x) \cdot h(x)$



Nullstellen „siegen“

Wo ein Faktor 0 ist, ist auch das Produkt 0, (falls der andere Faktor dort keinen Pol hat)

Wo ein Faktor 1 ist, trifft das Produkt den anderen Faktor (falls der andere Faktor dort keinen Pol hat)

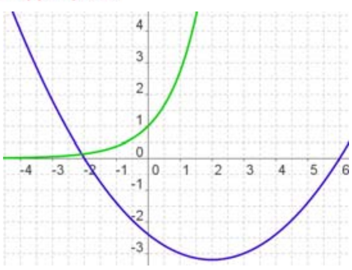
Funktionen - Bauhof

- Summe zweier Funktionen, ebenso Differenz
- Produkt zweier Funktionen, ebenso Quotient
- Verkettung zweier Funktionen, d.h. ineinander einsetzen hintereinander ausführen

Summen-Übung

- g(x) = e^x
- h(x) = 1 / 5 (x + 2) (x - 6)

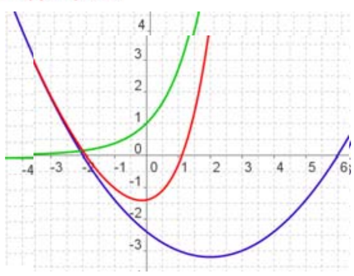
Abhängige Objekte
- f(x) = 1 / 5 (x + 2) (x - 6) + e^x



Summen-Übung

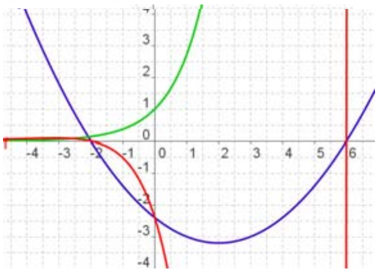
- g(x) = e^x
- h(x) = 1 / 5 (x + 2) (x - 6)

Abhängige Objekte
- f(x) = 1 / 5 (x + 2) (x - 6) + e^x



Produkt-Übung

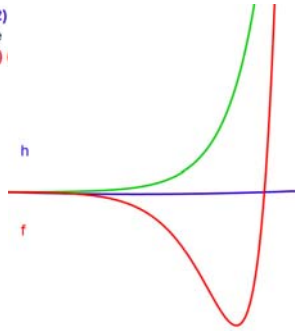
g(x) = e^x
h(x) = 1 / 5 (x + 2) (x - 6)
Abhängige Objekte
f(x) = 1 / 5 (x + 2) (x - 6) e^x



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Produkt-Übung

g(x) = e^x
h(x) = 1 / 5 (x + 2)
Abhängige Objekte
f(x) = 1 / 5 (x + 2)

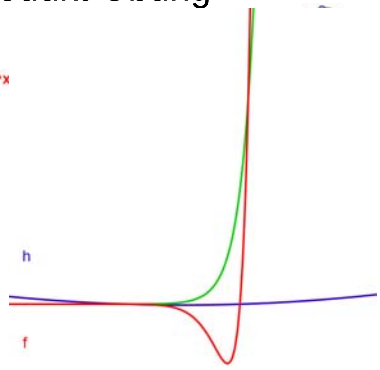


Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Produkt-Übung

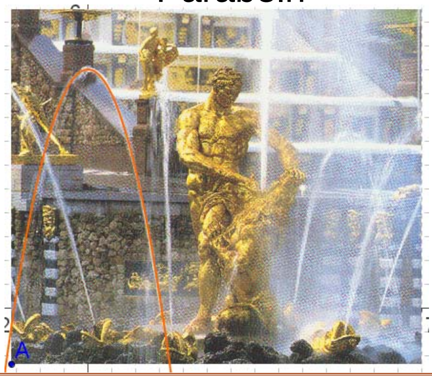
g(x) = e^x
h(x) = 1 / 5 (x + 2) (x - 6)
Abhängige Objekte
f(x) = 1 / 5 (x + 2) (x - 6) e^x

Merke:
Die e-Funktion ist stärker als jede Potenz von x.



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

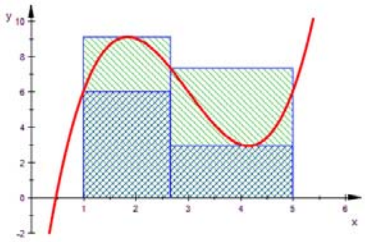
Parabeln



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Infinitesimales

Hier wächst Ihr Wissen über das unendlich Kleine



Der Modellierungskreislauf

Ein erfundenes Beispiel:

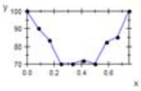
16 Uhr Unfall mit Fahrerflucht in Hann. Münden

Ein Zeuge glaubt einen Transporter mit reichlich Werbeschrift gesehen zu haben.

Der Besitzer behauptet es sei um 16 Uhr gar nicht in Hann.Münden gewesen.

Der Modellierungskreislauf

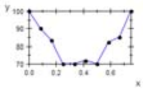
Um 15 Uhr war er nachweislich noch in Bodenwerder, 80 km entfernt.

Der Fahrtenschreiber zeigt:  Reale Situation

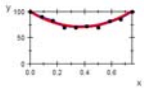
Länge der gefahrenen Strecke ist gesucht.

Der Modellierungskreislauf

Um 15 Uhr war er nachweislich noch in Bodenwerder, 80 km entfernt.

Der Fahrtenschreiber zeigt:  Reale Situation

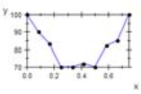
Länge der gefahrenen Strecke ist gesucht.

 mathematisches Modell

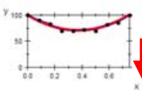
Fläche unter der Modellkurve gesucht.

Der Modellierungskreislauf

Um 15 Uhr war er nachweislich noch in Bodenwerder, 80 km entfernt.

Der Fahrtenschreiber zeigt:  Reale Situation

Länge der gefahrenen Strecke ist gesucht.

 mathematisches Modell

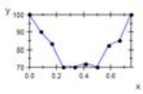
Fläche unter der Modellkurve gesucht.

mathematische Lösungsidee

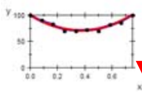
$$s = \int_0^{0.75} v(t)\, dt$$

Der Modellierungskreislauf

Um 15 Uhr war er nachweislich noch in Bodenwerder, 80 km entfernt.

Der Fahrtenschreiber zeigt:  Reale Situation

Länge der gefahrenen Strecke ist gesucht.

 mathematisches Modell

Fläche unter der Modellkurve gesucht.

mathematische Lösungsidee

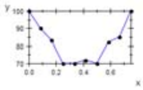
$$s = \int_0^{0.75} v(t)\, dt$$

mathematische Antwort $s = 60\ km$

Der Modellierungskreislauf

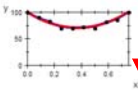
Um 15 Uhr war er nachweislich noch in Bodenwerder, 80 km entfernt.

Der Fahrtenschreiber zeigt:



Reale Situation

Länge der gefahrenen Strecke ist gesucht.



mathematisches Modell

Fläche unter der Modellkurve gesucht.

mathematische Lösungsidee

$$s = \int_0^{0.75} v(t)\,dt$$

mathematische Antwort $s = 60\ km$

Funktionen werden zum Werkzeug

Man erhält Antworten beim

Blick auf „das Ganze“ mit dem Integral

(integer (lat.)= ganz

pane integrale (it.))= Vollkornbot $\int f(x)dx$

Funktionen beschreiben Zusammenhänge

Man erhält punktuelle Antworten mit dem Differential

$df, \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x)$

Das Integral

$\int f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx$

Man erhält Antworten beim

Blick auf „das Ganze“ mit dem Integral

(integer (lat.)= ganz

pane integrale (it.))= Vollkornbot

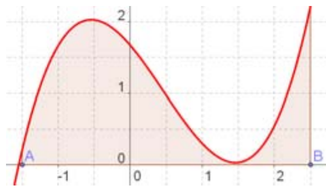
Das Integral

$\int f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx$

Man erhält Antworten beim

Blick auf „das Ganze“ mit dem Integral



$$s = \int_a^b v(t)\,dt$$

Weg Geschwindigkeit Zeit

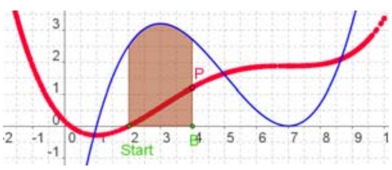
$$W = \int_a^b F(s)\,ds$$

Arbeit Kraft Weg

Boden, Mantelfläche, Volumen, Schwerpunkt, Energiebilanz....

Die Integralfunktion

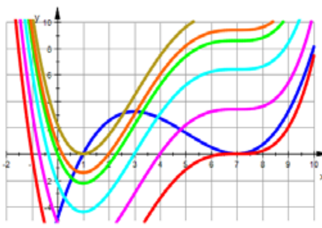
$$F(x,a) := \int_a^x f(t)\,dt$$



P zeigt hier nur ein Fünftel der Fläche an.

Die Integralfunktion

$$F(x,a) := \int_a^x f(t)\,dt$$



Alle Integralfunktionen haben dieselbe Form.

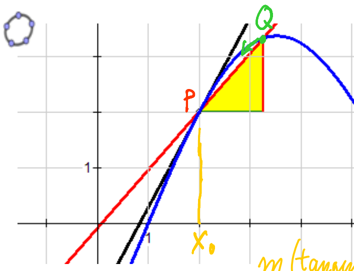
An den Extremstellen von F hat f eine Nullstelle.

An der Sattelstelle von F hat f eine Berühr-Nullstelle.

Wo F eine Wendestelle hat, hat f eine Extremstelle.

Das Differential

Also untersuchen wir für jeden Punkt einer Funktion:
welche Steigung hat die Funktion in dem Punkt?



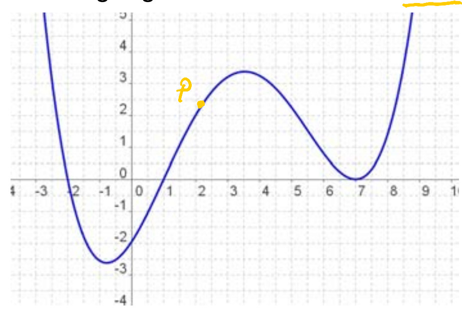
Wenn man Q an P heranrücken lässt, wird das Steigungsdreieck der Sekante immer kleiner und man erhält die Tangente in P.

$m(\text{tangente in } x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} m_{Sek}$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Das Differential

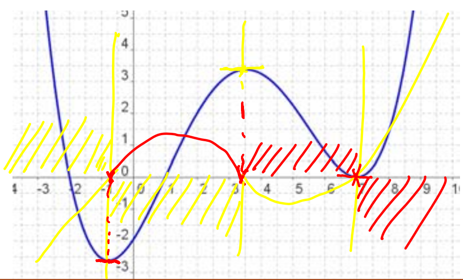
Also untersuchen wir für jeden Punkt einer Funktion:
welche Steigung hat die Funktion in dem Punkt?



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

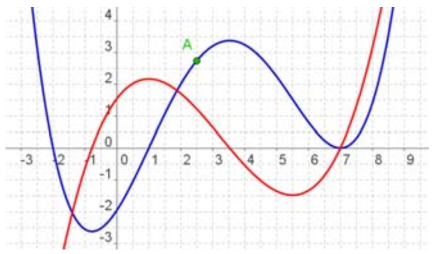
Das Differential

Also untersuchen wir für jeden Punkt einer Funktion:
welche Steigung hat die Funktion in dem Punkt?



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

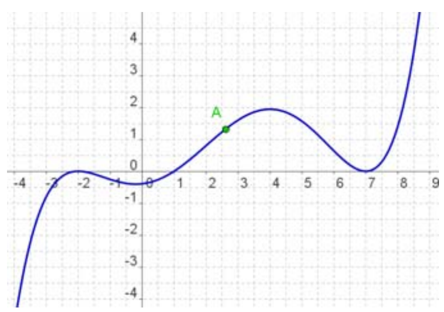
Die Ableitung f ‘ ist die Funktion, die für jedes x die Steigung der Funktion f angibt.



Die rote Funktion ist also die Ableitung von der blauen.

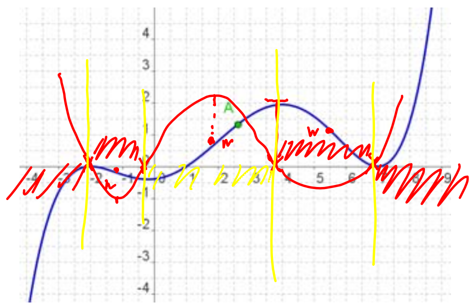
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Übung 2 mit Funktionsgraphen



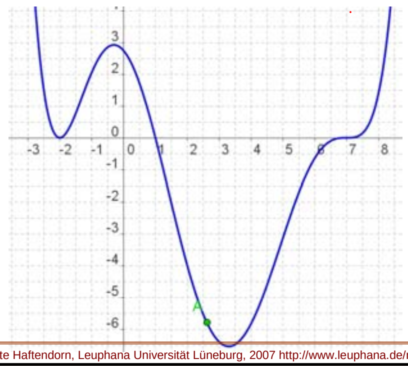
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Übung 2 mit Funktionsgraphen

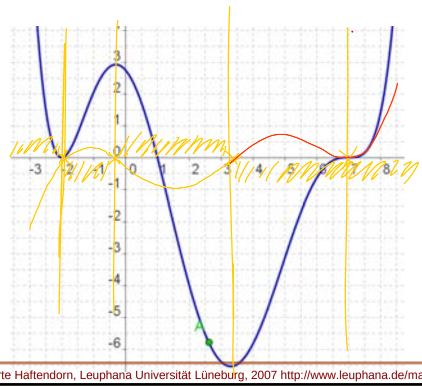


Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Übung mit Funktionsgraphen

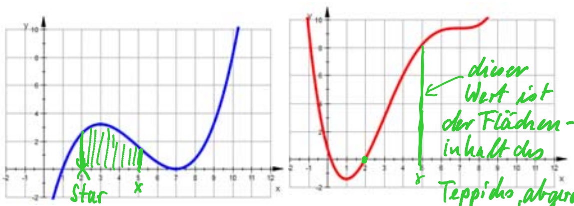


Übung mit Funktionsgraphen



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Nochmal die Teppichabrollfunktion



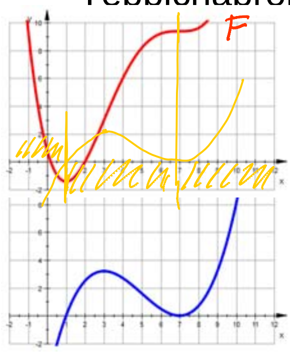
f als Rand des Teppichs

$F(x) = \int_2^x f(x)\, dt$

Integralfkt zum Start 2

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Nochmal die Teppichabrollfunktion



f als Ableitung von F

dasselbe!

f als Randfkt. für den abgerollten Teppich

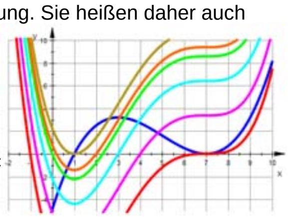
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

$$f(x) = F'(x)$$

d. h. Alle Integralfunktionen zu f mit beliebigem Start haben ihr f auch als Ableitung. Sie heißen daher auch „Stammfunktionen“ von f,

f blau



sie unterscheiden sich nur um eine additive Konstante c. Man schreibt:

$F(x) = \int f(x)\, dx + c$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

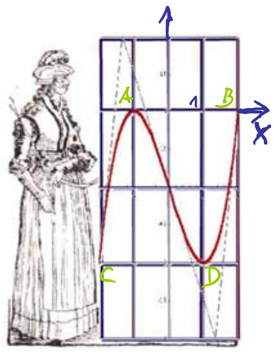
Polynome und mehrfache Nullstellen

Polynome sind Gefangene ihrer leicht durchschaubaren Eigenschaften.

Stichwort: Polynome im Affenkasten

www.mathematik-verstehen.de

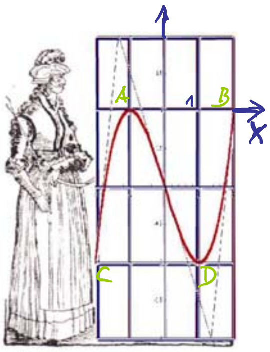
Nullstellen erzeugen Linearfaktoren



$f(x) = (x+1)^2(x-2)$

A B

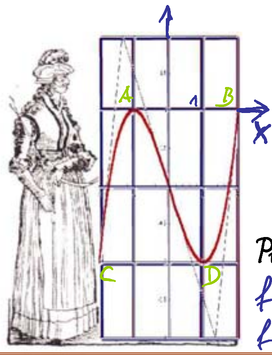
Nullstellen erzeugen Linearfaktoren



$f(x) = (x+1)^2(x-2)$

doppelte Nullstelle	einfache Nullstelle
x= -1	x= 2
A	B

Nullstellen erzeugen Linearfaktoren



$f(x) = (x+1)^2(x-2)$

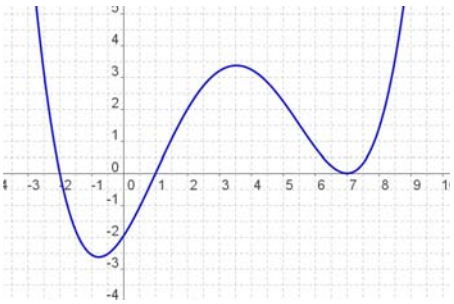
doppelte Nullstelle	einfache Nullstelle
x= -1	x= 2
A	B

Proben

$f(-2) = \underbrace{(-2+1)^2(-2-2)}_{=-4}$ C

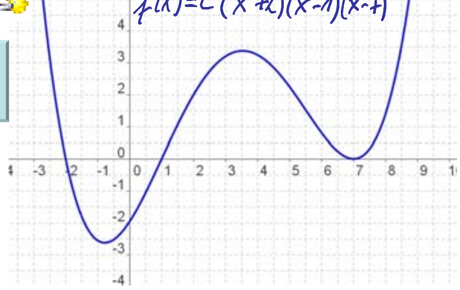
$f(1) = (1+1)^2(1-2) = -4$ D

Welche Gleichung kann dieses Polynom haben?



Welche Gleichung kann dieses Polynom haben?

$f(x) = t\,(x+2)(x-1)(x-7)^2$



Was ist eigentlich ein Polynom?

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Ein Polynom ist eine Summe von Potenzfunktionen.
Der höchste Exponent, der vorkommt, heißt Grad des Polynoms.

- Polynome 1. Grades sind die Geraden
- Polynome 2. Grades sind die Parabeln
- Polynome 3. Grades haben immer eine symmetrische s-Form.
- Polynome 4. Grades haben höchstens 3 Extrema.
- Je höher der Grad, desto vielfältigere Formen sind möglich.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Polynome und ihre Linearfaktoren

Jede reelle Nullstelle a erzeugt einen Linearfaktor. $(x-a)$

$$f(x) = (x-a)\, q(x)$$

Wenn das Restpolynom auch noch die Nullstelle a enthält, kann man den Linearfaktor mehrfach „herausziehen".

$$f(x) = (x-a)^k\, p(x) \quad mit \quad p(a) \neq 0$$

Geht das maximal k-mal, dann heißt a k-fache Nullstelle, oder „Nullstelle der Vielfachheit k"

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

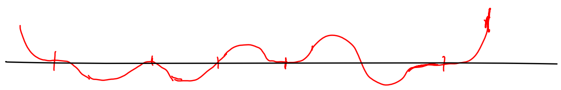
Polynome und ihre Linearfaktoren

$$f(x) = (x-a)^k\, p(x) \quad mit \quad p(a) \neq 0$$

Geht das maximal k-mal, dann heißt a k-fache Nullstelle, oder „Nullstelle der Vielfachheit k"

In der Nähe eine k-fachen Nullstelle verhält sich das Polynom wie sich die k-Potenzfunktion im Ursprung verhält.

Ein Polynom n-ten Grades hat höchsten n Nullstellen, mit ihrer Vielfachheit gezählt.



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Polynome und ihre Linearfaktoren

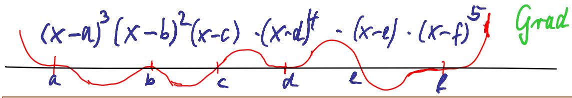
$$f(x) = (x-a)^k\, p(x) \quad mit \quad p(a) \neq 0$$

Geht das maximal k-mal, dann heißt a k-fache Nullstelle, oder „Nullstelle der Vielfachheit k"

In der Nähe eine k-fachen Nullstelle verhält sich das Polynom wie sich die k-Potenzfunktion im Ursprung verhält.

Ein Polynom n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen, mit ihrer Vielfachheit gezählt.

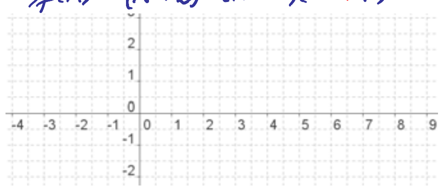
$(x-a)^3(x-b)^2(x-c)\cdot(x-d)^4\cdot(x-e)\cdot(x-f)^5$ Grad?



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Übung 2 mit Polynomen

$f(x) = (x+2)^2\cdot(x-1)(x-7)^2$



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

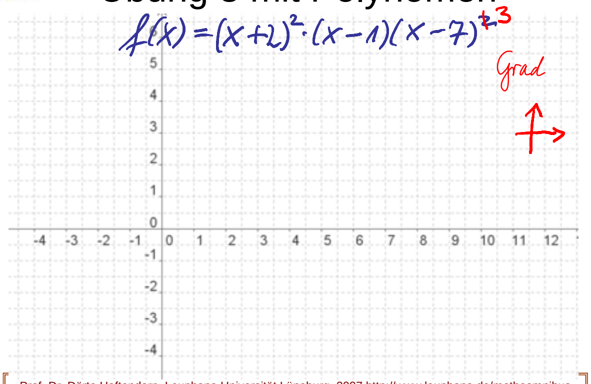
Übung 2 mit Polynomen

$f(x) = (x+2)^2\cdot(x-1)(x-7)^2$

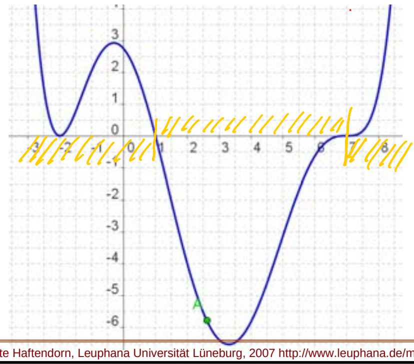
Grad 5

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Übung 3 mit Polynomen

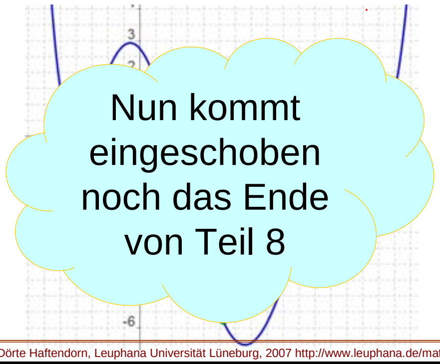


Übung 3 mit Polynomen



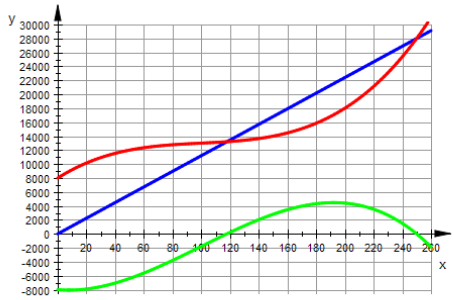
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Übung 3 mit Funktionen und ihren Ableitungen



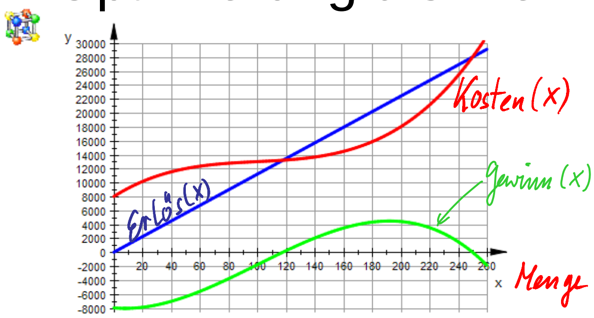
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Optimierung als Ziel



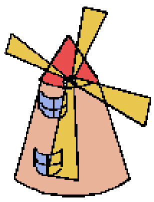
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

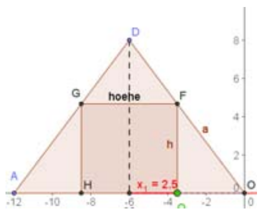
Optimierung als Ziel



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Wasser in der Mühle



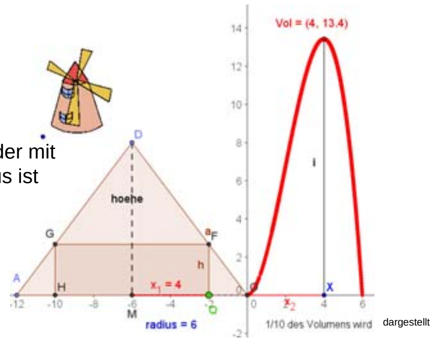


Im kegelförmigen Dach einer Mühle soll ein zylindrischer Wasserbehälter mit möglichst großem Volumen eingebaut werden.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Wasser in der Mühle

Ein Zylinder mit 4 m Radius ist optimal



Optimierung

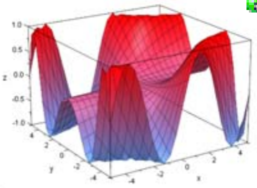
durch die Suche nach Extrempunkten auf den Graphen von Funktionen

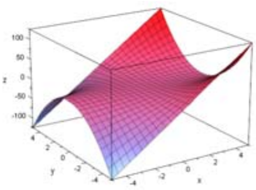
....das ist das Einfachste

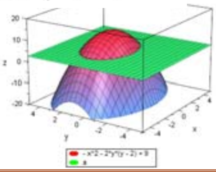
Das ist aber längst nicht Alles.

Funktionen 3D

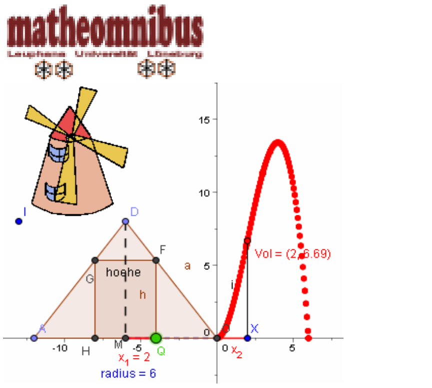
Hier ist die Optimum-Suche nicht ganz so einfach





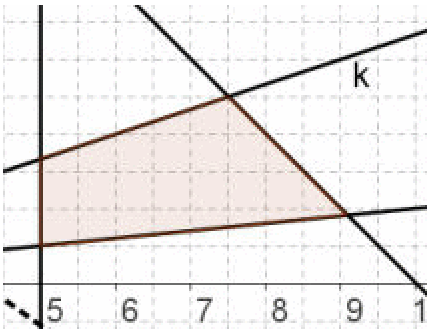


Optimierung als Ziel

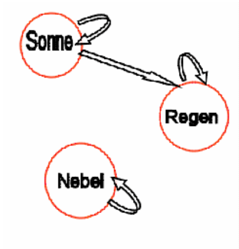


- Mini-Maxi 2D und 3D
- **Vorlesung 9: Polynome und Beginn Optimierung** pdf *.ppt
- Wasser in der Mühle *.ggb

- **Vorlesung 10 Teil 1: 3D-Funktionen** pdf *.ppt
- 3D-Verstehen, 3D-Optimieren .html pdf .mn



- Lineares Optimieren und warum Simplex nicht simpel ist
- **Vorlesung 10 Teil 2: Lineare Optimierung** pdf *.ppt
- Lineares Optimieren *.ggb
- Weitere Aufgabe: Klasse 9-Aufgabe: Math-Öl



- Matrix, Matrizen, aber nicht Matrize und Matratzen
- Was macht das Wetter auf Dauer? ODER Wie beschreibt man Prozesse?
- **Vorlesung 11: Matrizen und Prozesse** pdf *.ppt
- Wetter in Bad Markstein pdf
- MuPAD-Datei dazu .mn

MATHEMATIK-VERSTEHEN

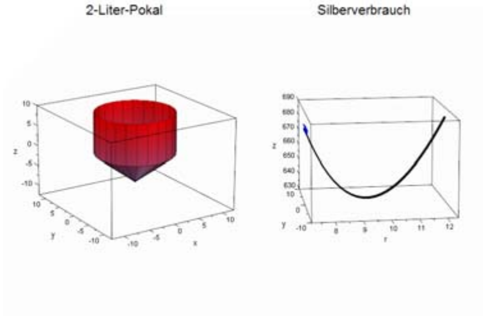
Weiterführungen, "Steinbruch" für das völlig neue Bauwerk "Mathematik für alle".

- Extremwert-Probleme
- Analysis
- Lineare Optmierung
- Markowketten und Warteschlangen

Optmierung als Ziel

2-Liter-Pokal

Silberverbrauch



Optimierung

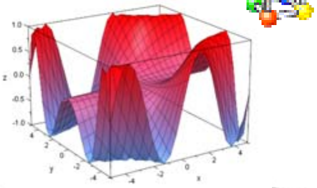
durch die Suche nach Extrempunkten auf den Graphen von Funktionen

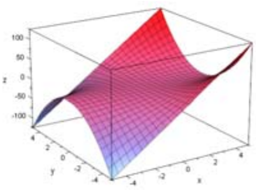
....das ist das Einfachste

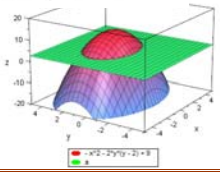
Das ist aber längst nicht Alles.

Funktionen 3D

Hier ist die Optimum-Suche nicht ganz so einfach







Aufgabe 3 Didaktik: Lineare Optimierung und Modellbildung

a) Schulaufgabe (Sek I):

Klasse 9

Herkunft \\ Art	Leichtöl	Schweröl	Benzin	Rest
Arabien	40%	10%	40%	10%
Amerika	10%	30%	30%	30%

Die MATHÖL- Raffinerie bezieht Roh-Öl aus Arabien und Amerika. (Zusammensetzung rechts oben).
Täglich müssen mindestens produziert werden: Leichtöl 120 t, Schweröl 105 t, Benzin 240 t.
Arabisches Öl kostet im Einkauf für die Raffinerie 400 €/t, amerikanisches Öl 300 €/t.
Wieviel Tonnen müssen täglich aus beiden Ländern verarbeitet werden, damit die Kosten für das eingesetzte Rohöl minimal sind?

(1) Bearbeiten Sie diese Aufgabe mit schulischen Mitteln (Sek I), mit allen Rechnungen, dem Planungsvieleck, der Zielgeraden und einem passenden Antwortsatz.

(2) Nun wird in Amerika ein Ölfeld stillgelegt und der amerikanische Preis steigt. Welche Wirkung hat das auf die Lösung?

Für die Lehramt-Studierenden folgen hier Fragen zur Didaktik, Gestaltung von Unterricht, Erläuterung des Modellbildungskreislaufes usw.

10.1.1 Ein Problem der Produktionsplanung

Zwei verschiedene Kunststoffprodukte I, II werden aus (in beliebiger Menge verfügbarem) Rohgranulat hergestellt. Drei Vorgänge bestimmen die Produktion: Warmpressen, Spritzguss und Verpackung. Produkt I entsteht durch Warmpressen des Granulates, Produkt II entsteht durch Spritzguss des Granulates. Beide Produkte werden anschließend für den Versand verpackt.

Die Fertigungsstelle „Pressen" steht pro Tag für höchstens 10 h zur Verfügung, pro t des Produktes I wird 1 h benötigt. Die entsprechenden Daten für die Fertigungsstelle „Spritzguss" lauten: 6 h/Tag und 1 h/t. In der Verpackungsabteilung stehen vier Arbeitskräfte mit jeweils täglich maximal 8 Arbeitsstunden zur Verfügung. Pro t von Produkt I werden 2 h, pro t von Produkt II werden 4 h in der Verpackungsabteilung benötigt. Durch den (gesicherten) Absatz aller produzierten Kunststoffprodukte erzielt die Unternehmung die Stückdeckungsbeiträge: 30 €/t für Produkt I, 20 €/t für Produkt II.

In welcher Mengenkombination soll die Unternehmung die beiden Produkte herstellen, damit sie den gesamten täglichen Deckungsbeitrag maximiert?

Tabelle 10.1.1 gibt eine Übersicht über die Modellbedingungen(Produktionskoeffizienten, Kapazitäten, Deckungsbeiträge (DB)).

Tab. 10.1.1

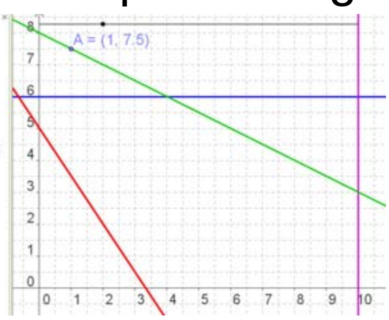
	Prod. I	Prod. II	max. Tageskapazität
Pressen	1 h/t	-	10 h
Spritzen	-	1 h/t	6 h
Packen	2 h/t	4 h/t	32 h
DB	30 €/t	20 €/t	

[1] Statt *Lineare Optimierung* ebenfalls gebräuchlich: *Lineare Planungsrechnung* oder *Lineare Programmierung*.

GeoGebra

Lineare Optimierung

- Freie Objekte
  - A = (1, 7.5)
  - G = 100
  - a: y = 6
  - b: x = 10
  - c: y = -0.5x + 8
- Abhängige Objekte
  - d: y = -1.5x + 5



Lineare Optimierung

18.1.3.1 Simplextableau

Bronstein

Mit dem *Simplexverfahren* wird eine Folge von Eckpunkten des zulässigen Bereiches mit wachsenden Zielfunktionswerten ermittelt. Der Übergang zu einer neuen Ecke wird vollzogen, indem eine zur gegebenen Ecke gehörende Normalform zu einer Normalform der neuen Ecke umgewandelt wird. Zur übersichtlichen Darstellung dieses Vorganges sowie zur Formalisierung der rechentechnischen Umsetzung wird eine als bekannt vorausgesetzte Normalform (18.8a,b) in das Simplextableau **(Schema 18.2a, 18.2b)** eingetragen:

Schema 18.2a

	x_1	$\cdots$	x_{n-m}	
x_{n-m+1}	$a_{1,1}$	$\cdots$	$a_{1,n-m}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	$a_{m,1}$	$\cdots$	$a_{m,n-m}$	b_m
	c_1	$\cdots$	c_{n-m}	$-c_0$

oder kürzer

Schema 18.2b

	$\underline{\mathbf{x}}_N$	
$\underline{\mathbf{x}}_B$	$\mathbf{A}_N$	$\underline{\mathbf{b}}$
	$\underline{\mathbf{c}}$	$-c_0$

Die k–te Zeile des Tableaus ist zu lesen als

$$x_{n-m+k} + a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n-m}x_{n-m} = b_k. \qquad (18.14a)$$

Für die Zielfunktion gilt

$$c_1x_1 + \cdots + c_{n-m}x_{n-m} = f(\underline{\mathbf{x}}) - c_0. \qquad (18.14b)$$

Aus dem Simplextableau wird die Ecke $(\underline{\mathbf{x}}_N, \underline{\mathbf{x}}_B) = (\underline{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{b}})$ abgelesen. Gleichzeitig ist der Zielfunktionswert dieser Ecke durch $f(\underline{\mathbf{x}}) = c_0$ bestimmt.
Auf jedes Tableau trifft genau einer der drei Fälle zu:
a) $c_j \le 0$, $j = 1, \ldots, n-m$: Das Tableau ist optimal. Der Punkt $(\underline{\mathbf{x}}_N, \underline{\mathbf{x}}_B) = (\underline{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{b}})$ ist der Maximalpunkt.
b) Für mindestens ein j gilt $c_j > 0$ und $a_{ij} \le 0$, $i = 1, \ldots, m$: Das lineare Optimierungsproblem besitzt

---

Num. f. Anfänger G. Opfer

7 Lineare Optimierung

Basisvektoren gibt, ist es naheliegend bei der Suche nach Lösungen, nur Basisvektoren zuzulassen. Von George Dantzig stammt ein Verfahren (ca. 1951), aus einem gegebenen Basisvektor $\mathbf{x}^{(0)}$ einen neuen Basisvektor $\mathbf{x}^{(1)}$ zu konstruieren, für den $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(1)} \le \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(0)}$ gilt und bei dem sich die beiden Basisindexmengen nur um ein Element unterscheiden.

Das Auffinden eines Basisvektors am Anfang der Rechnung kann durch Lösen eines *Hilfsproblems* erfolgen. Das besprechen wir im nächsten Abschnitt.

Mit $\mathbf{a}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ bezeichnen wir nach wie vor die Spalten von $\mathbf{A}$. Sei Sei $\mathbf{x}^{(0)}$ ein Basisvektor mit Basisindexmenge I und $\bar{\mathbf{x}}$ irgendein zulässiger Vektor. Wie können wir die Zielfunktionswerte $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(0)}$ vergleichen? Jeder der Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j$ von $\mathbf{A}$ läßt sich eindeutig als Linearkombination

$$\text{(7.3)} \qquad \mathbf{a}^j = \sum_{i\in I} d_{ij}\mathbf{a}^i, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

der Spaltenvektoren aus der Basis darstellen. Für $j \in I$ ist daher insbesondere[2]

$$\text{(7.4)} \qquad d_{ij} = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da sowohl $\mathbf{x}^{(0)}$ als auch $\bar{\mathbf{x}}$ zulässig sind, gilt:

$$\sum_{i\in I} x_i^{(0)}\mathbf{a}^i = \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j\,\mathbf{a}^j = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j\,(\sum_{i\in I} d_{ij}\mathbf{a}^i) = \sum_{i\in I}(\sum_{j=1}^n d_{ij}\bar{x}_j)\mathbf{a}^i.$$

Da die $\mathbf{a}^i$, $i \in I$ linear unabhängig sind, ist die Darstellung von $\mathbf{b}$ eindeutig, also:

$$\begin{aligned} \text{für alle } i \in I: \quad x_i^{(0)} &= \sum_{j=1}^n d_{ij}\bar{x}_j = \sum_{j\in I} d_{ij}\bar{x}_j + \sum_{j\notin I} d_{ij}\bar{x}_j\,. \\ \text{Also gilt für } i \in I: \quad x_i^{(0)} &= \bar{x}_i + \sum_{j\notin I} d_{ij}\bar{x}_j\,, \\ \text{oder} \qquad \bar{x}_i &= x_i^{(0)} - \sum_{j\notin I} d_{ij}\bar{x}_j\,. \end{aligned}$$

[2] Die hier in (7.4) eingeführte Größe δ_{ij} heißt auch *Kronecker-Symbol*.

7.3 Das Simplexverfahren 207

Für den Zielfunktionswert $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^n c_j\bar{x}_j &= \sum_{i\in I} c_i\bar{x}_i + \sum_{j\notin I} c_j\bar{x}_j \\ &= \sum_{i\in I} c_i(x_i^{(0)} - \sum_{j\notin I} d_{ij}\bar{x}_j) + \sum_{j\notin I} c_j\bar{x}_j \\ \text{(7.5)} \qquad &= \sum_{i\in I} c_i x_i^{(0)} + \sum_{j\notin I} \bar{x}_j\,(c_j - \sum_{i\in I} d_{ij}c_i) \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(0)} + \sum_{j\notin I} \bar{x}_j\,(c_j - \sum_{i\in I} d_{ij}c_i). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\text{(7.6)} \quad \sigma_j := \sum_{i\in I} d_{ij}c_i \quad \text{und} \quad t_j := c_j - \sigma_j \quad \text{für alle} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Satz 7.6. a) Genau dann ist $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} < \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(0)}$, wenn $\sum_{j\notin I} t_j\bar{x}_j < 0$. b) Ist $t_j \ge 0$ für alle $j \notin I$, so ist $\mathbf{x}^{(0)}$ Lösung von (7.2).
Beweis: a) folgt direkt aus (7.5) in der Form $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(0)} + \sum_{j\notin I} t_j\bar{x}_j$. b) Unter den getroffenen Voraussetzungen ist $\sum_{j\notin I} t_j\bar{x}_j \ge 0$, also $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} \ge \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(0)}$ für jedes zulässige $\bar{\mathbf{x}}$. Also ist $\mathbf{x}^{(0)}$ Lösung. □

Ist also $\mathbf{x}^{(0)}$ keine Lösung, so existiert ein $r \notin I$ mit $t_r < 0$.
Satz 7.7. Existiere ein Index $r \notin I$ mit $t_r < 0$. a) Für jedes $\delta \in \mathbb{R}$ löst $\mathbf{x}(\delta) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\text{(7.7)} \qquad x_j(\delta) = \begin{cases} x_j^{(0)} - \delta d_{jr} & \text{für } j \in I, \\ \delta & \text{für } j = r, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x}(\delta) = \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}^T\mathbf{x}(\delta) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^{(0)} + \delta t_r$. b) Ist $d_{ir} \le 0$ für alle $i \in I$, so hat die Aufgabe (7.2) keine Lösung.
Beweis: a) Die j-te Spalte von $\mathbf{A}$ bezeichnen wir wieder mit $\mathbf{a}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}(\delta) &= \sum_{j=1}^n x_j(\delta)\mathbf{a}^j = \sum_{j\in I} x_j(\delta)\mathbf{a}^j + \delta\mathbf{a}^r = \sum_{j\in I}(x_j^{(0)} - \delta d_{jr})\mathbf{a}^j + \delta\mathbf{a}^r \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} + \delta(\mathbf{a}^r - \sum_{j\in I} d_{jr}\mathbf{a}^j) = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

GeoGebra

Lineare Optimierung

Bronstein

$$\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{array}, \qquad \mathbf{A}_B^{-1}\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \qquad (18.11b)$$

Es ergibt sich das System

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = 1 \\ -x_1 - x_3 + x_4 + x_5 & = 1 \\ -x_1 + 2x_3 + x_6 & = 2 \\ 5x_1 + 5x_3 - 3x_4 + x_7 & = 5 \end{array}\right\}. \qquad (18.12)$$

Aus $f(\underline{\mathbf{x}}) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ erhält man durch Subtraktion der mit 3 multiplizierten ersten Nebenbedingung eine auf Nichtbasisvariablen umgerechnete Zielfunktion

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = -x_1 + x_3 + 3x_4 + 3. \qquad (18.13)$$

Ende eines Beispiels

..... aha, das kommt also für mind. 70 % von Ihnen demnächst

GeoGebra

Lineare Optimierung

..... aha, das kommt also für mind. 70 % von Ihnen demnächst
aber nicht hier
in

Mathematik für alle

Es gibt Aufgabe 10 zu diesem Thema.

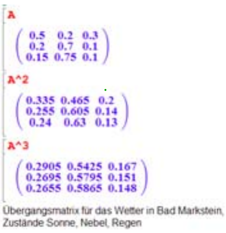
Info: Repetitorium Sa. 1.12 .07

8:15 und 10:15 hier in HS 2

Gestaltung: Haftendorn und Tutoren

Nicht nur eine Matrix, sondern viele Matrizen

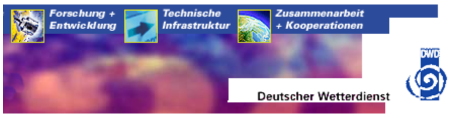
$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,15 & 0,75 & 0,1 \end{pmatrix}$$


A
$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.15 & 0.75 & 0.1 \end{pmatrix}$
A^2
$\begin{pmatrix} 0.335 & 0.465 & 0.2 \\ 0.255 & 0.605 & 0.14 \\ 0.24 & 0.63 & 0.13 \end{pmatrix}$
A^3
$\begin{pmatrix} 0.2905 & 0.5425 & 0.167 \\ 0.2695 & 0.5795 & 0.151 \\ 0.2655 & 0.5865 & 0.148 \end{pmatrix}$

Übergangsmatrix für das Wetter in Bad Markstein, Zustände Sonne, Nebel, Regen

aber keine Matrize und auch keine Matratzen

Wie beschreibt man Prozesse?



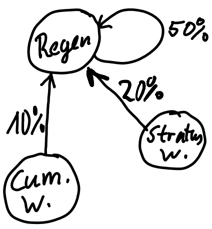
Makov-Modell

Markov-Prozess

Markov-Kette

Die Hamburger Vorhersagen des Markov-Modells für Vorhersagezeiten von 6 bis 24 Stunden sind in Abb. 1a dargestellt. Zeigt der aktuelle Synop von Hamburg im Feld W1 Niederschlag, so ergibt sich nach diesem Modell eine Wahrscheinlichkeit von 50 %, daß es auch im nächsten 6-Stunden Zeitraum zu Niederschlägen kommt. Liegt eine niedrige Stratusbewölkung vor, ohne daß es zur Zeit Niederschläge gibt, so führt das zu einer Niederschlagswahrscheinlichkeit von 20 %. Liegt keiner der beiden erstgenannten Fälle vor, d.h. die tiefen Wolken sind cumulusartig oder nicht vorhanden, dann reduziert sich die Niederschlagswahrscheinlichkeit auf 10 %.

Wie beschreibt man Prozesse?

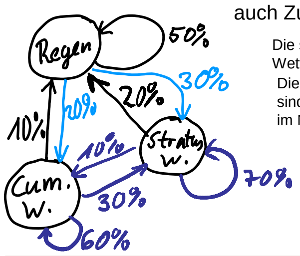


Die Hamburger Vorhersagen des Markov-Modells für Vorhersagezeiten von 6 bis 24 Stunden sind in Abb. 1a dargestellt. Zeigt der aktuelle Synop von Hamburg im Feld W1 Niederschlag, so ergibt sich nach diesem Modell eine Wahrscheinlichkeit von 50 %, daß es auch im nächsten 6-Stunden Zeitraum zu Niederschlägen kommt. Liegt eine niedrige Stratusbewölkung vor, ohne daß es zur Zeit Niederschläge gibt, so führt das zu einer Niederschlagswahrscheinlichkeit von 20 %. Liegt keiner der beiden erstgenannten Fälle vor, d.h. die tiefen Wolken sind cumulusartig oder nicht vorhanden, dann reduziert sich die Niederschlagswahrscheinlichkeit auf 10 %.

Wie beschreibt man Prozesse?

Darstellung mit Übergangs-Graphen,

auch Zustands-Graphen genannt.

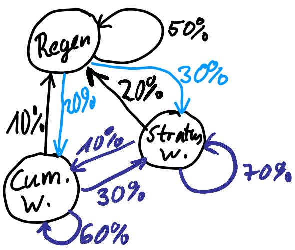


Die schwarzen Zahlen sind original vom Wetteramt Hamburg.

Die blaue Zahlen sind ausgedacht, so etwa sind sie bei der Math. Gesellschaft Hamburg im Nov. 2005 vorgestellt worden.

Wie beschreibt man Prozesse?

Darstellung mit Zustands-Graphen.



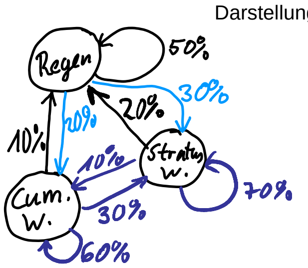
Bedingungen für einen richtigen Zustandsgraphen:

- Alle möglichen Zustände sind Knoten des Graphen.
- Die Übergangspfeile sind mit Wahrscheinlichkeiten beschriftet.
- Die einem Knoten abgehenden Pfeile haben Gesamtwahrscheinlichkeit 1.

Wie beschreibt man Prozesse?

Darstellung mit Zustands-Graphen.

Darstellung mit einer Übergangsmatrix



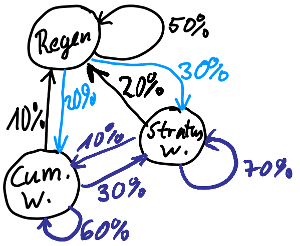
	Re	St	Cu
Re			
St			
Cu			

Wie beschreibt man Prozesse?

Mit dem Wetter rechnen

Darstellung mit Zustands-Graphen.

Darstellung mit einer Übergangsmatrix



	Re	St	Cu
Re	0,5	0,3	0,2
St	0,2	0,7	0,1
Cu	0,1	0,3	0,6

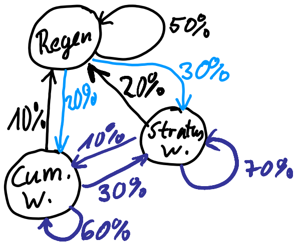
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Wie beschreibt man Prozesse?

Mit dem Wetter rechnen

Darstellung mit Zustands-Graphen.

Darstellung mit einer Übergangsmatrix A



$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

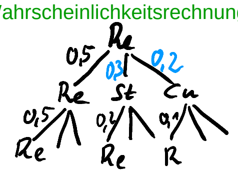
Wie sagt man Entwicklungen vorher?

Mit dem Wetter rechnen

Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Heute ist Regen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist übermorgen auch Regen?
Baumdiagramm, Werkzeug der Wahrscheinlichkeitsrechnung



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

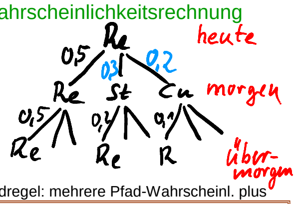
Wie sagt man Entwicklungen vorher?

Mit dem Wetter rechnen

Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Heute ist Regen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist übermorgen auch Regen?
Baumdiagramm, Werkzeug der Wahrscheinlichkeitsrechnung



$$0{,}5\cdot 0{,}5 + 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}1$$
$$= 0{,}25 + 0{,}06 + 0{,}01$$
$$= 0{,}32 = 32\% = P(\text{üb.m.Re})$$

1. Pfadregel: längs des Pfades mal; 2. Pfadregel: mehrere Pfad-Wahrscheinl. plus

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Wie rechnet man Vorhersagen aus?

Mit dem Wetter rechnen

Die Übergangsmatrix muss man mit sich selbst multiplizieren.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Zeile Spalte

$$0{,}5\cdot 0{,}5 + 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}1$$
$$= 0{,}25 + 0{,}06 + 0{,}01$$
$$= 0{,}32 = 32\% = P(\text{üb.m.Re})$$

$$a_{ij} = \boxed{\;i\;} \cdot \boxed{j}$$

Skalarprodukt
Platzweise •, Produkt +

1. Pfadregel: längs des Pfades mal; 2. Pfadregel: mehrere Pfad-Wahrscheinl. plus

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Wie rechnet man Vorhersagen aus?

Mit dem Wetter rechnen

Die Übergangsmatrix muss man mit sich selbst multiplizieren.

$$A\cdot A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}42 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}58 & 0{,}17 \\ 0{,}17 & 0{,}42 & 0{,}41 \end{pmatrix}$$

a_{23} nachrechnen:

Übergangsmatrizen haben immer Zeilensumme 1.
Stochastische Matrizen haben immer Zeilensumme 1.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Wie rechnet man Vorhersagen aus?

Die Übergangsmatrix muss man mit sich selbst multiplizieren.

$$A\cdot A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,3 & 0,2\\ 0,2 & 0,7 & 0,1\\ 0,1 & 0,3 & 0,6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,5 & 0,3 & 0,2\\ 0,2 & 0,7 & 0,1\\ 0,1 & 0,3 & 0,6\end{pmatrix}$$

a_{23} nachrechnen:

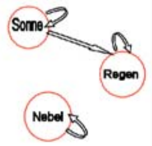
$$A\cdot A=\begin{pmatrix}0,33 & 0,42 & 0,25\\ 0,25 & 0,58 & 0,17\\ 0,17 & 0,42 & 0,41\end{pmatrix}$$

$0,2\cdot 0,2+0,7\cdot 0,1+0,1\cdot 0,6$
$=0,04+0,07+0,06=\underline{\underline{0,17}}$ richtig

Übergangsmatrizen haben immer Zeilensumme 1.
Stochastische Matrizen haben immer Zeilensumme 1.

Das Wetter in Bad Markstein

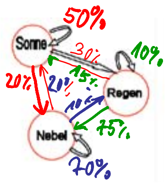
- Drei Zustände: Sonne, Nebel, Regen
- Wenn heute Sonne ist, dann ist mit 50%-Wahrscheinlichkeit auch morgen Sonne, mit 20 % W. ist Nebel, mit 30 % W. ist Regen.
- Wenn heute Nebel ist, dann ist mit 20% W. morgen Sonne, mit 70% W. wieder Nebel, mit 10% W. Regen,
- Wenn heute Regen ist, dann ist mit 15% W. morgen Sonne, mit 75% W. Nebel, mit 10% W. wieder Regen.



Übung:
Beschriften Sie den Zustandsgraphen.
Stellen Sie die Übergangsmatrix auf.
Denken Sie sich eine „übermorgen-Frage“ aus und beantworten Sie sie.

Das Wetter in Bad Markstein

- Drei Zustände: Sonne, Nebel, Regen
- Wenn heute Sonne ist, dann ist mit 50%-Wahrscheinlichkeit auch morgen Sonne, mit 20 % W. ist Nebel, mit 30 % W. ist Regen.
- Wenn heute Nebel ist, dann ist mit 20% W. morgen Sonne, mit 70% W. wieder Nebel, mit 10% W. Regen,
- Wenn heute Regen ist, dann ist mit 15% W. morgen Sonne, mit 75% W. Nebel, mit 10% W. wieder Regen.



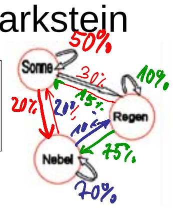
Übung:
Beschriften Sie den Zustandsgraphen.
Stellen Sie die Übergangsmatrix auf.
Denken Sie sich eine „übermorgen-Frage“ aus und beantworten Sie sie.

Das Wetter in Bad Markstein

A

$$\begin{pmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\ 0.2 & 0.7 & 0.1\\ 0.15 & 0.75 & 0.1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}S & N & R\end{array}\\ A= & \begin{pmatrix}0,5 & 0,2 & 0,3\\ 0,2 & 0,7 & 0,1\\ 0,15 & 0,75 & 0,1\end{pmatrix}\end{array}$$



B = A^2

$$\begin{pmatrix}0.335 & 0.465 & 0.2\\ 0.255 & 0.605 & 0.14\\ 0.24 & 0.63 & 0.13\end{pmatrix}$$

A^3

$$\begin{pmatrix}0.2905 & 0.5425 & 0.167\\ 0.2695 & 0.5795 & 0.151\\ 0.2655 & 0.5865 & 0.148\end{pmatrix}$$

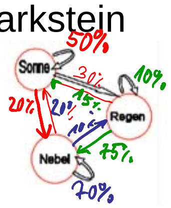
A = Übergangsmatrix für das Wetter in Bad Markstein, Zustände Sonne, Nebel, Regen

Das Wetter in Bad Markstein

A

$$\begin{pmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\ 0.2 & 0.7 & 0.1\\ 0.15 & 0.75 & 0.1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}S & N & R\end{array}\\ A= & \begin{pmatrix}0,5 & 0,2 & 0,3\\ 0,2 & 0,7 & 0,1\\ 0,15 & 0,75 & 0,1\end{pmatrix}\end{array}$$



B = A^2

$$\begin{pmatrix}0.335 & 0.465 & 0.2\\ 0.255 & 0.605 & 0.14\\ 0.24 & 0.63 & 0.13\end{pmatrix}$$

heute (i) ⇒ übermorgen (j) mit Wahrscheinlichkeit b_{ij}

Zeile Spalte

A^3

$$\begin{pmatrix}0.2905 & 0.5425 & 0.167\\ 0.2695 & 0.5795 & 0.151\\ 0.2655 & 0.5865 & 0.148\end{pmatrix}$$

A = Übergangsmatrix für das Wetter in Bad Markstein, Zustände Sonne, Nebel, Regen

Das Wetter in Bad Markstein

A^20

$$\begin{pmatrix}0.2746478873 & 0.5704225352 & 0.1549295775\\ 0.2746478873 & 0.5704225352 & 0.1549295775\\ 0.2746478873 & 0.5704225352 & 0.1549295775\end{pmatrix}$$

vv

$$(0.2746478873 \quad 0.5704225352 \quad 0.1549295775)$$

vv*A

$$(0.2746478873 \quad 0.5704225352 \quad 0.1549295775)$$

Durch hohe Potenzen der Übergangsmatrix erhält man die stabile Wetterverteilung in Bad Markstein.

- Sonne etwa 27,5% aller Tage
- Nebel etwa 57 % aller Tage
- Regen etwa 15,5% aller Tage

$\vec{v}\cdot A=\vec{v}$

$\vec{v}$ ist „Eigenvektor zum Eigenwert 1“

Das Wetter in Hamburg

HH

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

HH^2

$$\begin{pmatrix} 0.33 & 0.42 & 0.25 \\ 0.25 & 0.58 & 0.17 \\ 0.17 & 0.42 & 0.41 \end{pmatrix}$$

HH^3

$$\begin{pmatrix} 0.274 & 0.468 & 0.258 \\ 0.258 & 0.532 & 0.21 \\ 0.21 & 0.468 & 0.322 \end{pmatrix}$$

HH^100

$$\begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Durch hohe Potenzen der Übergangsmatrix erhält man eine Matrix mit lauter gleichen Zeilen. So eine Zeile ist der stabile Vektor dieser Markov-Kette, also die stabile Wetterverteilung in Hamburg.

Achtung: Nur die erste Spalte in HH ist amtlich.

- Regen: 25% aller Tage
- Statuswolken: 50% aller Tage
- Cumulus oder keine W.: 25% aller Tage

Zum Merken:

Ein stochastischer Prozess mit Zustandsübergängen heißt

Markov-Kette (oder Markov-Prozess)

wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht von der Vorgeschichte, sondern nur vom letzten Zustand abhängen
Sind sie außerdem noch zeitlich konstant,
spricht man von einer **homogenen Markov-Kette**.

Die Übergangsmatrizen A sind stochastische Matrizen (d.h. mit Zeilensumme 1)
Eine Zustandsverteilung schreibt man als Zeilenvektor .
Mit $\vec{V}_{neu} = \vec{V}_{alt} A$ ergibt sich die nächste Zustandsverteilung.
Eine stabile Zustandsverteilung erhält man durch hohe Potenzen von A oder als Eigenvektoren von A zum EW 1.

Definition einer Matrix, rechnen mit Matrizen:

Eine m x n-Matrix ist ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten.

n kreuz m

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$ Kurz $$A = \left(a_{ij}\right)$$

- Die Summe der Matrizen A und B ist definiert durch

$$A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Zwei Matrizen derselben Ordnung werden addiert, indem man die entsprechenden Elemente addiert.

- Wenn $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist αA definiert durch

$$\alpha A = \alpha\,(a_{ij})_{m\times n} = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$$

Um eine Matrix mit einem Skalar zu multiplizieren, muss man jedes Element mit diesem Skalar multiplizieren.

Definition einer Matrix, rechnen mit Matrizen:

Eine m x n-Matrix ist ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten.

n kreuz m

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$ Kurz $$A = \left(a_{ij}\right)$$

Rechenregeln für Matrizenaddition und Multiplikation mit Skalaren

A, B und C seien $m \times n$ Matrizen, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{0}$ sei die Nullmatrix der Ordnung $m \times n$, die nur aus Nullen besteht. Dann gilt:

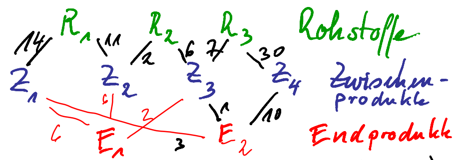
$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ $\qquad A + B = B + A$
$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$ $\qquad A + (-A) = \mathbf{0}$
$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ $\qquad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Mathematische Kurzform:„Die nxm-Matrizen bilden einen Vektorraum"

Matrizen als Allrounder

1. Sie fassen viele Einzelgleichungen zusammen.
2. Sie beschreiben Gleichungssysteme und helfen beim Lösen.
3. Sie vermitteln Abbildungen.
4. Sie verfolgen Prozesse.
5. Sie strukturieren und beschreiben in vielen mathematischen Gebieten.

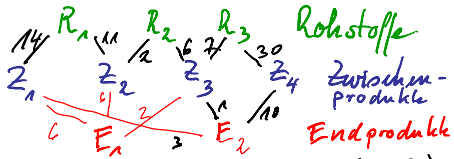
Matrizen in der Wirtschaft



$$A = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 30 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$C = A \cdot B =$

Matrizen in der Wirtschaft



$$A=\begin{pmatrix}14 & 11 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 7 & 30\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 10\end{pmatrix}$$

$$C=A\cdot B=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}E_1 & E_2\end{array}\\ \begin{pmatrix}150 & 42\\ 24 & 6\\ 14 & 307\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}R_1\\ R_2\\ R_3\end{array}$$

Deutung z.B. für E_2 werden 307 Einh. R_3 gebraucht

Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}3x-7y&=-1\\ 12x+y&=25\end{aligned} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}3 & -7\\ 12 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 25\end{pmatrix}$$

$$A\,p=b$$

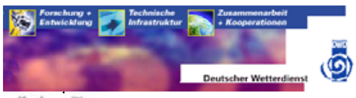
A^{-1}

$\det(A)$

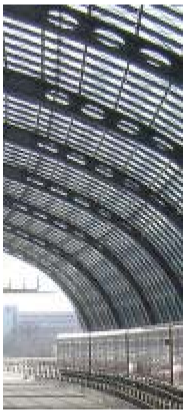
$\mathrm{Rang}(A)$ .....

Ein sehr guter Werkzeugkasten tut sich auf.

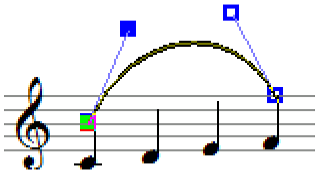
Mit Matrizen beschreibt man ein Stück Welt, um es besser zu verstehen.



Numerik



- Hauptsache, man hat Zahlen 'raus
- Was man exakt nicht schafft, das macht man mit Numerik
- Fallen und Fußangeln in der Numerik
- **Vorlesung 12: Numerik** pdf *.ppt
- Interpolationspolynom A *.ggb



- Bézierkurve mit ihrem definierenden Gerüst A *.ggb
- Bézierkurve, die man verbiegen kann A *.ggb
- Bézier-Splines, Aufführliche Erklärungsseite pdf

- **Vorlesung 13 Teil 1:**
Binärzahlen und Rechnen damit pdf *.ppt
- Zahlen-Hellseher, ein Spiel mit Dualzahl-Hintergrund
- Double-Daddel-Methode

Weiterführungen, "Steinbruch" für das völlig neue Bauwerk "Mathematik für alle".

- Numerik

Numerik

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Numerik

- Numerik bewältigt vieles in den Anwendungen
- Fallen und Fußangeln in der Numerik
- Grundlagen der Computer
-
- Was man exakt nicht schafft, das macht man mit Numerik
- Hauptsache, man hat wenigstens Zahlen 'raus

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

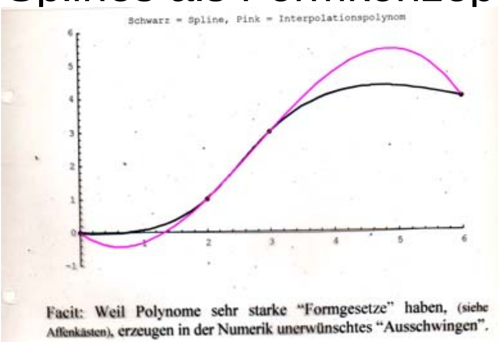
Numerik beim Bauen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Splines = Straklatten

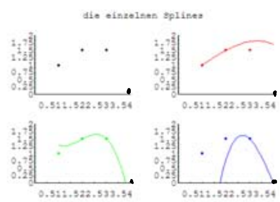
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

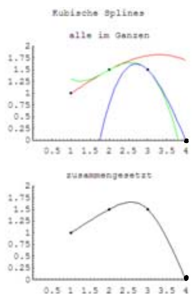
Splines als Formkonzept



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Kubische Splines





- Vier „Nägel“ markieren die Form.
- Von einem zum nächsten legt man ein Polynom 3. Grades (daher „kubisch“).
- Man sorgt für gute Übergänge
- und fügt alle passend zusammen.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

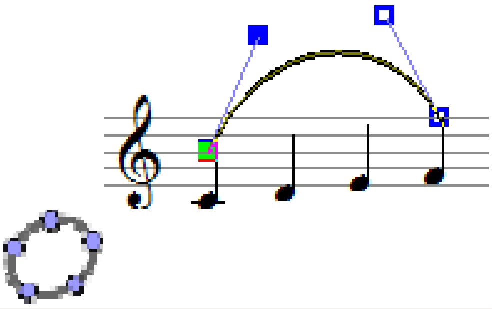
CAD
Computer Aided Design

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Numerik

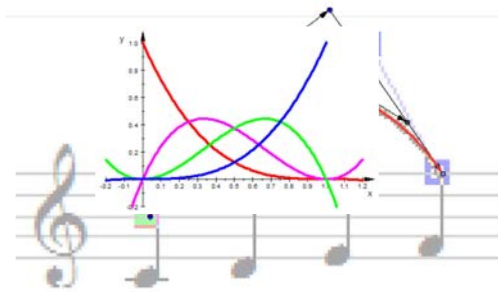
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Bézier-Splines



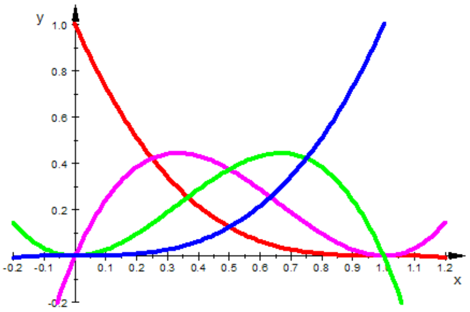
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Bézier-Splines



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Bézier-Splines aus Bernstein-Polynomen



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

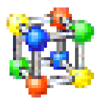
Fallen und Fußangeln in der Numerik

Beispiel für Rechenfehler (Kulisch, Miranker[270])

x = 192119201
y = 35675640
z = (1682*x*y4 + 3*x3 + 29*x*y2 - 2*x5 + 832) / 107751

$$-\frac{x^5\cdot 2}{107751}+\frac{x^3}{35917}+\frac{1682\cdot x\cdot y^4}{107751}+\frac{29\cdot x\cdot y^2}{107751}+\frac{832}{107751}$$

Wir wenden zur Lösung 3 Systeme an:



Berechnung mit Mathematica
Berechnung mit Taschenrechner
Berechnung mit Programmiersprache C

http://www.logic.at/people/schuster/c01_0000.htm

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Numerik

Programm	Eingabe	Precision	Resultat	Ergebnis
Mathematica		infinity	1783	richtig
	36 Stellen	117	1783	richtig
	35 Stellen	113	0.	**falsch**
	17 Stellen	57	0.E+13	**falsch**
	16 Stellen Maschinengenauigkeit	53	7.180560037061026E+20	**falsch**
Taschenrechner			7.72150606491E-03	**falsch**
Turbo C	Single precision	24	1.01146705423582961E+29	**falsch**
	Double precision	53	7.72150606490891022E-03	**falsch**

Grundlagen der Numerik mit Computer

Zitat aus: http://www.logic.at/people/schuster/c01_0000.htm

Das obige Beispiel soll zeigen, dass die Beachtung der **Schnittstellenspezifikation** - in diesen Fall die **Prinzipien der Gleitpunkt-Arithmetik** - absolut notwendig sind, um numerische Daten am Computer sinnvoll und richtig verarbeiten zu können.

$100\sqrt{2}$ exakt

$141{,}421$ 3 Nachkommastellen, 6 tragende Ziffern

$\underbrace{0{,}141421}_{\text{Mantisse}}\cdot 10^{3}$ 6 Nachkommastellen, 6 tragende Ziffern

Mantisse Exponent

Grundlagen der Numerik mit Computer

Gleitpunktzahl = floatingpoint number

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

Vor-zeichen-bit

11 Bit für den Exponenten

52 Bit für die Mantisse

Grundlagen der Numerik mit Computer

Gleitpunktzahl = floatingpoint number

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

Vor-zeichen-bit

11 Bit für den Exponenten

52 Bit für die Mantisse

64 Bit für eine Kommazahl — das sind 8 Byte

Das sind dann etwa 16 dezimale Stellen für die Mantisse

Die Zehnerpotenzen laufen etwa von +300 bis -300

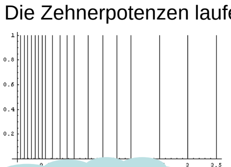
Grundlagen der Numerik mit Computer

Gleitpunktzahl = floatingpoint number

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

Das sind dann etwa 16 dezimale Stellen für die Mantisse

Die Zehnerpotenzen laufen etwa von +300 bis -300



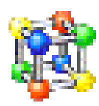
Die Abstände zwischen den darstellbaren Zahlen werden immer größer.

Unterscheiden sich zwei große Zahlen erst nach mehr als 16 Stellen kann ihre Differenz nicht ordentlich berechnet werden.

Differenz-katastrophe

Binärsystem, Dualzahlen

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111



Binärsvstem. Dualzahlen

0 |101 0010 0001| |0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111|

Double-Daddel-Methode

83

1	0	1	0	1	0	
1	2	4	10	20	42	
		5		21		
1	0	1	0	1	0	
32	16	8	4	2	1	
32		8		2		42

Binärsvstem. Dualzahlen

0 |101 0010 0001| |0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111|

Double-Daddel-Methode

4 40 82
1 2 5 10 20 41 83
1 0 1 0 0 1 1

Probe 1 0 1 = 5 10 ✓ 20 ✓ 40 ✓
1 0 1 0 0 0 41 83

DD

1	0	1	0	1	0	
1	2	4	10	20	42	
		5		21		
1	0	1	0	1	0	
32	16	8	4	2	1	← Potenzen von 2
32		8		2		42

Binärsystem, Dualzahlen

0 |101 0010 0001| |0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111|

1 1 0 0 1 1 1 0 1

Hex und Dez

Binärsystem, Dualzahlen

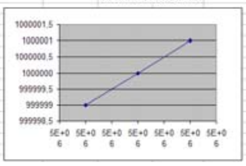
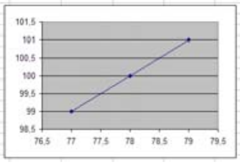
0 |101 0010 0001| |0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111|

256	16	16	16	16	1	1	1	1	
1	8	4	2	1	8	4	2	1	
			1	0	1	0	1	0	
			2		8		2		2A
1	1	0	0	1	1	1	0	1	
256	128			16	8	4		1	19D
									413
1	1	0	0	1	1	1	0	1	
1	2	6	12	24	50	102	206	412	
	3			25	51	103			

Weitere Pannen

x	y		x	y
5201477	999999		77	99
5201478	1000000		78	100
5201479	1000001		79	101

Wähle Trendlinie

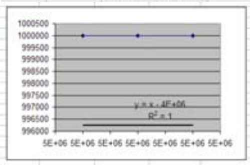
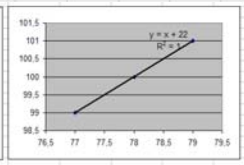
Klar, das ist beide Male eine Gerade

Excel

Weitere Pannen

x	y		x	y
5201477	999999		77	99
5201478	1000000		78	100
5201479	1000001		79	101

Wähle Trendlinie

nicht gelungen

Excel

Numerische Verfahren

Was man exakt nicht schafft, das macht man mit Numerik,

Hauptsache, man hat wenigstens Zahlen 'raus.

- Rekursive, b.z.w. iterative Konzepte
  - Heronverfahren für Wurzeln
  - Nullstellenverfahren (Mitten~, Sekanten~ , Newton~)
  - Modellierung von Prozessen (logistisch...)
  - Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Weitere Konzepte:
Numerische Integration,
Taylorreihen, Fourierreihen.....

Excel

Die Klothoide, nur numerisch zu bewältigen

gegeben:

$$x = \int_0^t \cos \frac{x^2}{2A^2}\,dx, \quad y = \int_0^t \sin \frac{y^2}{2A^2}\,dy \qquad (7.30)$$

Die Integrale lassen sich durch die Simpson'sche Näherungsformel berechnen.

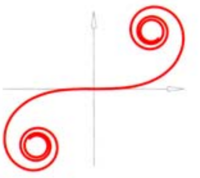


Abb. 7.46 Klothoide

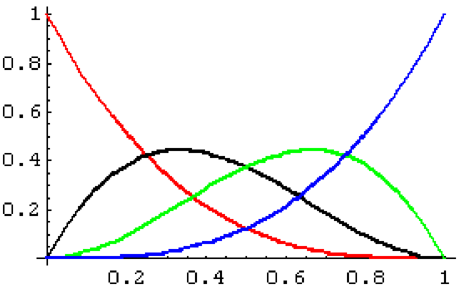
Abb. 7.47 Turbulenzen über dem Atlantik

Glaeser: Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik

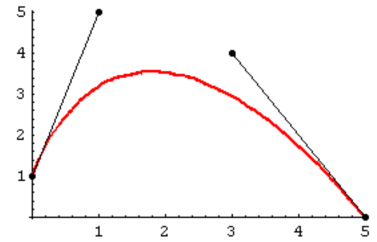
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Lineare Algebra Bernsteinpolynome

Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg LBS **Beispiel für eine andere Basis** 23. November 1999/02

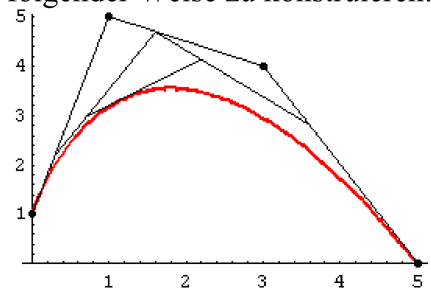


$$B_0(t) = (1-t)^3$$
$$B_1(t) = 3(1-t)^2 t$$
$$B_2(t) = 3(1-t)t^2$$
$$B_3(t) = t^3$$

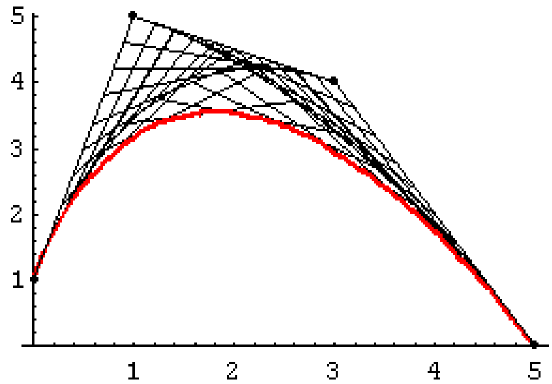


Die Bernsteinpolynome dritten Grades bilden eine Basis im Vektorraum der Polynome 3. Grades. Sie sind über dem Intervall [0/1] definiert. Ihre praktische Bedeutung liegt in der bequemen Berechnung der Bezierkurve. Diese kommt in allen Graphikprogrammen vor, die ein “Kurvenwerkzeug” bieten. Gegen sind zwei Punkte P_0 und P_3, durch die die Kurve verlaufen soll, und zwei weitere Punkte P_1 und P_2, die “Tangentenvektoren” markieren. Die Beziérkurve ist nun in folgender Weise zu konstruieren:

> Es werden die Steuerpunkte durch Strecken verbunden und ein Teilungsfaktor t gewählt. Die entsprechenden Teilungspunkte werden wieder durch Strecken verbunden. Diese werden wieder geteilt und verbunden. P sei der Teilungspunkt dieser letzten Strecke. Die Bezierkurve ist der geometrische Ort von P, wenn der Teilungsfaktor t von 0 bis 1 läuft.



Die Parameterdarstellung der Beziérkurve ergibt sich sofort aus den Koordinaten der “Steuerpunkte”

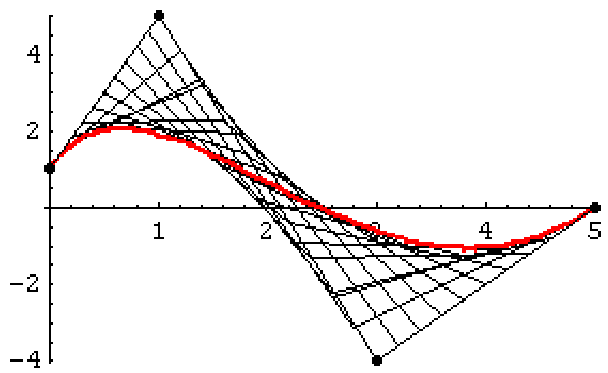


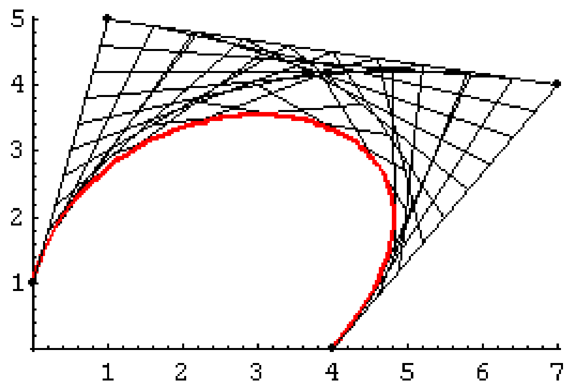
$$x(t) = x_0 B_0(t) + x_1 B_1(t) + x_2 B_2(t) + x_3 B_3(t)$$
$$y(t) = y_0 B_0(t) + y_1 B_1(t) + y_2 B_2(t) + y_3 B_3(t)$$

Dieses kann man zeigen, indem man mit Strahlensatzfiguren die Koordinaten der sechs Teilungspunkte in Abhängigkeit von den Steuerpunkten und t aufschreibt und dann passend eliminiert.

In dem Sonderfall, dass $x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{1}{3},\quad x_2 = \frac{2}{3},\quad x_3 = 1$ ist, wird

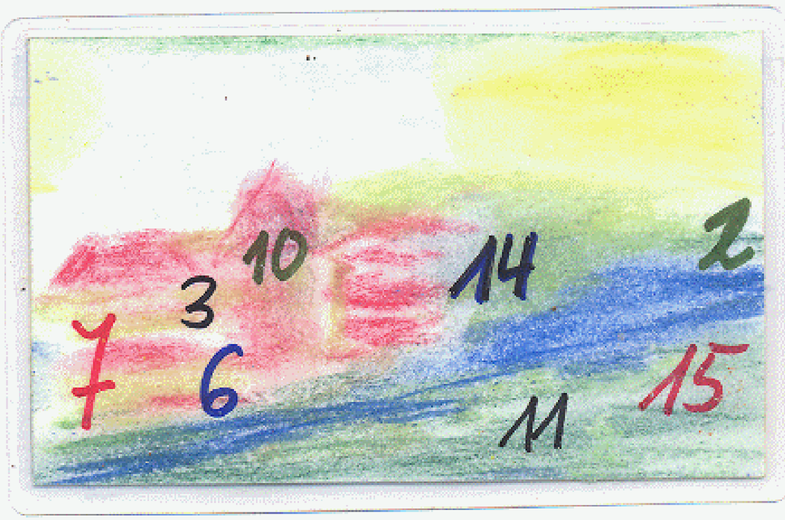
x(t)=t und die Beziérkurve damit folgendes Polynom $y(x) = y_0 B_0(x) + y_1 B_1(x) + y_2 B_2(x) + y_3 B_3(x)$

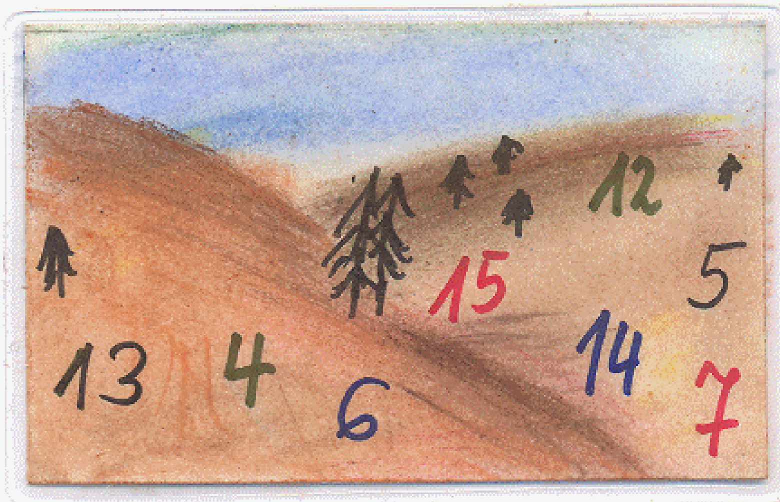


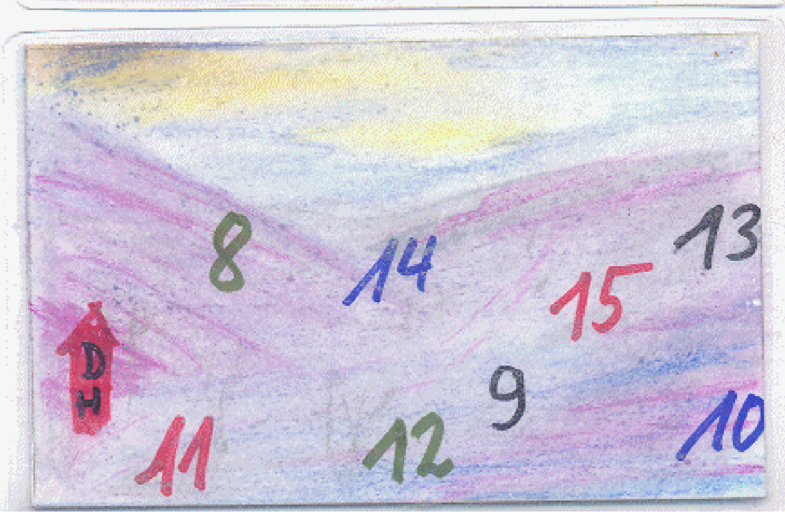


Der Zahlen-Hellseher

Prof. Dr. Dörte Haftendorn,
Universität Lüneburg,
16. Dezember 2005







Mathix ist der Hellseher.
Mathilde soll sich eine Zahl denken von 1 bis 15. (einschließlich)
Dann soll sie auf alle Karten zeigen, auf denen ihre Zahl steht.

Mathix sagt ihr dann nach kurzem Überlegen, welche Zahl sie sich gedacht hat.

Mathilde will herausbekommen wie Mathix das macht.
Einige Zahlen kommen nur auf einer einzigen Karte vor. Die sind der Schlüssel zur Lösung.

Mathilde macht eine Liste mit 4 Spalten für die 4 Karten, die oberste schreibt sie rechts hin.
Dann trägt sie von 1 bis 15 darunter Kreuzchen ein, wenn die Zahl auf der Karte vorkommt, kommt sie nicht vor, trägt sie eine Null ein.

Jetzt geht ihr ein Licht auf!

Da sind die Zahlen dargestellt im Zweiersystem.

Auch ohne diesen Hintergrund geht es:

Die 10 z.B. ist auf der 2-Karte und auf der 8-Karte und sonst nirgends. Wenn Mathide also auf diede beiden Karten zeigt, rechnet Mathix 2+8=10 und weiß Mathildes Zahl.

Für die Erzählung von diesem Spiel aus iher Kinderzeit danke ich Prof. Dr. Silke Ruwisch.

Bitte acht Bit für ein Byte

oder warum funktioniert der Computer

Der Zahlen-Hellseher

Ich denke mir eine Zahl, die ist abgebildet auf

Frühling, Herbst und Winter.

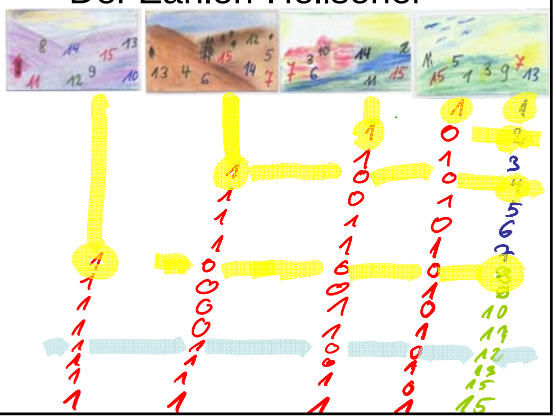
1 1 0 1

8 + 4 + 1

Es ist die 13

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Der Zahlen-Hellseher



Der Zahlen-Hellseher

Prof. Dr. Dörte Haftendorn,
Universität Lüneburg,
16. Dezember 2005

Mathix ist der Hellseher.
Mathilde soll sich eine Zahl denken von 1 bis 15. (einschließlich)
Dann soll sie auf alle Karten zeigen, auf denen ihre Zahl steht
.
Mathix sagt ihr dann nach kurzem Überlegen, welche Zahl sie sich gedacht hat.
Mathilde will herausbekommen wie Mathix das macht.
Einige Zahlen kommen nur auf einer einzigen Karte vor. Die sind der Schlüssel zur Lösung.

Mathilde macht eine Liste mit 4 Spalten für die 4 Karten, die oberste schreibt sie rechts hin.
Dann trägt sie von 1 bis 15 darunter Kreuzchen ein, wenn die Zahl auf der Karte vorkommt, kommt sie nicht vor, trägt sie eine Null ein.
Jetzt geht ihr ein Licht auf!
Da sind die Zahlen dargestellt im Zweiersystem.
Auch ohne diesen Hintergrund geht es:
Die 10 z.B. ist auf der 2-Karte und auf der 8-Karte und sonst nirgends.

Wenn Mathide also auf diese beiden Karten zeigt, rechnet Mathix
2+8=10 und weiß Mathildes Zahl.
Für die Erzählung von diesem Spiel aus ihrer Kinderzeit danke ich Prof. Dr. Ruwisch.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Binärsystem, Dualzahlen

Double-Daddel-Methode

83

1	0	1	0	1	0	
1	2	4	10	20	42	
		5		21		
1	0	1	0	1	0	
32	16	8	4	2	1	
32		8		2		42

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Binärsystem, Dualzahlen

a) Stelle 83 binär dar

Double-Daddel-Methode

4 40 82

1 2 5 10 20 41 83 ← start

1 0 1 0 0 1 1

Probe 1 0 1 = 5

1 0 1 0 = 10

1 0 1 0 0 = 40 ⇒ 41

82 ⇒ 83

binär → dez

1	0	1	0	1	0	
start → 1	2	4	10	20	42	
		5		21		
1	0	1	0	1	0	
32	16	8	4	2	1	
32		8		2		42

übliche Art

← Potenzen von 2

passend addieren

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Binärsystem, Dualzahlen

Jeder Platz ist ein „Bit“, acht Bit sind in „Byte“

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

256-er | 16-er | Einer

1 0 | 1 0 1 0 Binär

2 | 8 + 2 dezimal gedacht

= 2 A Hexadezimal

= $2 \cdot 16 + 10$ dezimal

= 42

Oben steht die Standard-Darstellung einer Zahl im Intel-Prozessor. (IEEE-Standard)

Binärsystem, Dualzahlen

Jeder Platz ist ein „Bit“, acht Bit sind in „Byte“

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

F 8 F 0 F A F

Übung

1 1 0 0 1 1 1 0 1 Hex und Dez Übung

Binärsystem, Dualzahlen

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

256-er | 16-er | Einer

	256	16	16	16	16	1	1	1	1	
	1	8	4	2	1	8	4	2	1	
binär → hex				1	0	1	0	1	0	
				2		8	+	2		2A
neue Afg.	1	1	0	0	1	1	1	0	1	
	256	128			16	8	4		1	19D
binär → dez										413
	1	1	0	0	1	1	1	0	1	
Start →	1	2	6	12	24	50	102	206	412	passt
		3			25	51	103		413	

Binärsystem, Dualzahlen

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

Addition in Binärsystem

1011 + 101

1101 + 101 = 10010

Multiplikation in Binärsystem

1101 · 101

110110 · 10011

Binärsystem, Dualzahlen

0 | 101 0010 0001 | 0001 0001 1111 1110 1001 1010 1111 1000 1111 0000 1111 1010 1111

Multiplikation in Binärsystem

1101 · 101
11010
1101
1000001

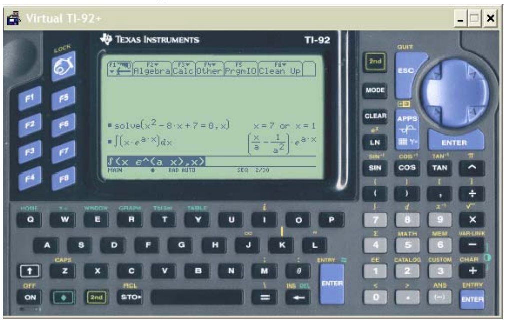
110110 · 10011
110110000
110110
110110
1000000010010

Das geht ja ganz ohne Kopfrechnen!!!

Eben: Computer sind ja auch dumm.

Werkzeuge für die Mathematik

Werkzeuge für die Mathematik



Mitte der 90-iger Jahre (1995 bei uns)

Werkzeuge für die Mathematik

2007

Werkzeuge für die Mathematik

- TR einfache Taschenrechner
- GTR graphikfähige Taschenrechner
- CAS-TR Computer-Algebra-fähige Taschenrechner

Software

- Numerisch-basierte Werkzeuge
- Graphische Unterstützungen (auch numerisch)

•CAS Computer-Algebra-Systeme

Werkzeuge für die Mathematik

Software

- Numerisch-basierte Werkzeuge
  - Tabellenkalkulationen, Statistik-Tools
  - Numerische Mathe-Tools (Mathe-Ass, Winfunktion, Turboplot, ... (können auch Funktionsgraphen zeichen)
  - CAM Computer Aided Manufactoring
- Graphische Unterstützungen (sind auch numerisch)
  - DGS= Dynamische Geometriesysteme
  - CAD Computer Aided Design
  - Darstellungssoftware (für Virtuelle Welten....)

•CAS Computer-Algebra-Systeme

Werkzeuge für die Mathematik

Software ...

- DMS Dynamische Mathematiksysteme (GeoGebra)
  - für Analysis, für Geometrie und etwas CAS
  - MathLab ....

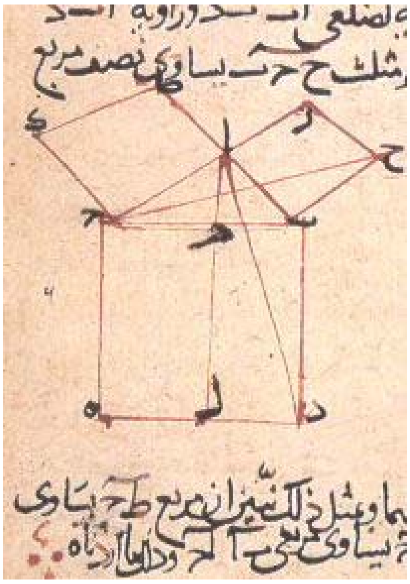
•CAS Computer-Algebra-Systeme

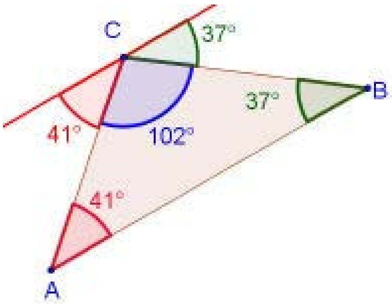
- MuPAD   www.mupad.de
- Mathematica   www.mathematica.com
- Maple   www.maplesoft.com
- u.a.

Werkzeuge für die Mathematik

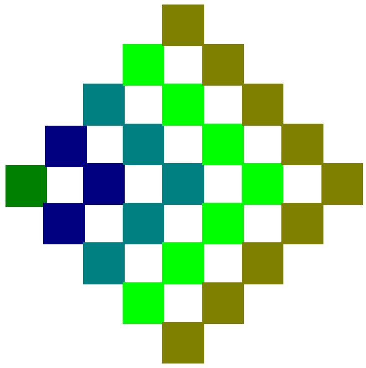
Rechnen-können reicht nicht mehr!

Selbstverständnis der Mathematik , allgemeines Vorgehen

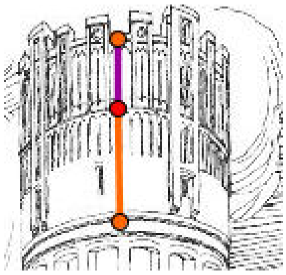




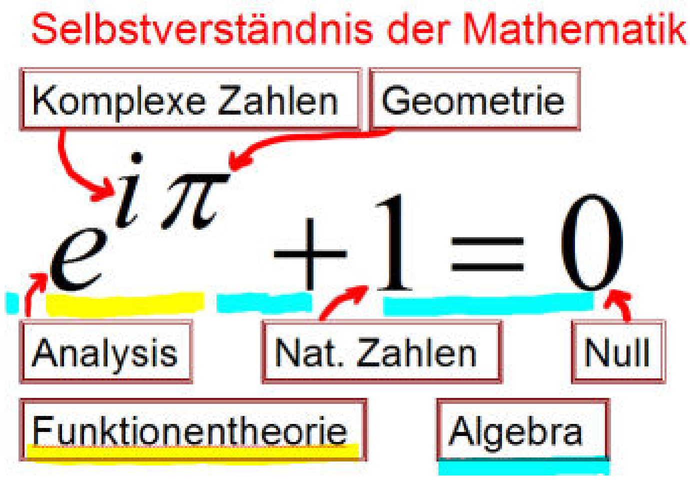
- **Vorlesung 14 Selbstverständnis der Mathematik** pdf *.ppt
- **Beweisen**
  - Links ist der 2300 Jahre alte Beweis des Euklid zum Kathetensatz, aufgeschrieben in einem arabischen Buch.
  - Darunter der Beweis des Winkelsummensatzes.
  - In Mathematik beginnt der Aufbau einer "Theorie" mit Definitionen und Axiomen. Alle weiteren Aussagen dieser Theorie werden dann vollständig bewiesen. Wenn das Beweisen nicht gelingt, heiß die Aussage "Vermutung". Mathematische Theorien sind nicht wiederlegbar. Wenn jemand die Axiome anders festlegen möchte, wird entweder bewiesen, dass beide Axiomsysteme äquivalent sind oder man hat eben eine andere Theorie. Die kann aber nirgends der ersten Theorie widersprechen. Sie bezieht sich auf etwas Anderes.
- **Stukturen suchen**
  - Rechts ist ein Beipiel aus dem Thema "Figurierte Zahlen" dargestellt. Es geht darum, wie sich die Anzahl der Karos entwickelt, wenn man immer weiter macht. In diesem Bereich werden viele Vorschläge schon ab der Grundschulmathematik gemacht.



  - Die **Algebra** als mathematische Grundlagendisziplin beschäftigt sich ausdrücklich mit "algebraischen Stukuren". Diese haben Namen, die mit den Deutungen der Nichtmathematiker **gar nichts** zu tun haben: Halbgruppe, Gruppe, Halbring, Ring, Körper, Schiefkörper....
  - In Wissenschaft, Technik und Wirtschaft sind die Mathematiker vor allem wegen Ihrer Strukturierungs- und Generalisierungsfähigkeit gefragt.



- **Modelle bilden, einsetzen, püfen,...**
  - Der Bezug zwischen Wirklichkeit und Modell gehört nicht zur eigentlichen mathematischen Theorie. Er ist durchaus heikel und muss in einem Kreislauf zwischen Modellieren, mathematische Durchfüren und Prüfen immer wieder infrage gestellt werden.
- **Freude haben an schönen Zusammenhängen**
  Links ist der Goldene Schnitt am Lüneburger Wasserturm dargestellt.
  Aber es gibt auch sehr sehr viele innermathematische Schönheiten



MATHEMATIK-VERSTEHEN

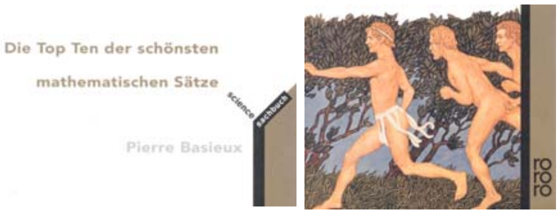
- Geschichte der Mathematik
- Unlösbare Probleme der Antike
- Aufbau des Zahlsystems Aufbau der Geometrie

Literatur

Literatur und Hilfen für das 1. Semester und grundlegende Mathematik-Werke

Selbstverständnis der Mathematik

$$e^{i\pi}+1=0$$



Selbstverständnis der Mathematik

Komplexe Zahlen | Geometrie

$$e^{i\pi}+1=0$$

Analysis | Nat. Zahlen | Null

Funktionentheorie | Algebra

Selbstverständnis der Mathematik

Math : = Menge der Menschen, die Mathematik studiert haben

Math : = Menge der Männer, die Mathematik studiert haben

Math : = Menge der Frauen, die Mathematik studiert haben

Die weiblichen Mathematiker heißen auch Mathematikerinnen.

Die männlichen Mathematiker heißen auch Mathematiker i.e.S.

i.e.S. = im engeren Sinne

Selbstverständnis der Mathematik

Math : = Menge der Menschen, die Mathematik studiert haben

Math : = Menge der Männer, die Mathematik studiert haben

Math : = Menge der Frauen, die Mathematik studiert haben

Es gilt der Satz: Math = Math $\cup$ Math

In Worten:

Alle Mathematiker sind männliche oder weibliche Mathematiker

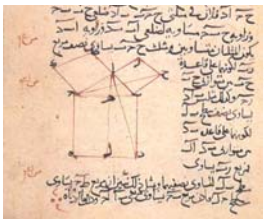
Die weiblichen Mathematiker heißen auch Mathematikerinnen.

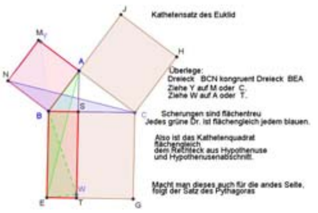
Die männlichen Mathematiker heißen auch Mathematiker i.e.S.

i.e.S. = im engeren Sinne

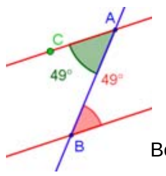
Math definieren ihre Begriffe

Math beweisen ihre Aussagen





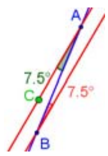
Math beweisen ihre Aussagen



Satz:

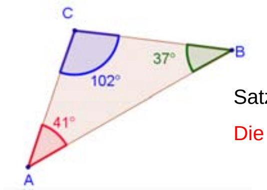
Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich groß.

Beweis:



Winkel sind durch Drehung zweier Geraden definiert. Dreht sich die Gerade CA, so muss sich die parallele durch B in gleicher Weise drehen. Daher sind in jeder Stellung von C die beiden Winkel gleich groß.

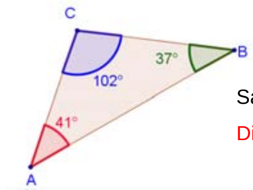
Math beweisen ihre Aussagen



Satz:

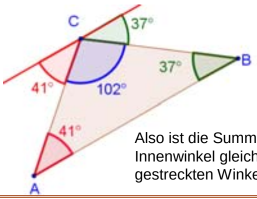
Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.

Math beweisen ihre Aussagen



Satz:

Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.



Beweis:

Konstruiere die Parallele zu AB durch C. Bei C entsteht ein gestreckter Winkel von 180°, dessen Außenteile Wechselwinkel der Innenwinkel sind. Sie sind also gleich groß.

Also ist die Summe der Innenwinkel gleich dem gestreckten Winkel.

Math konstruieren Theorien aus Definitionen und Sätzen

Text aus der Vorlesung Forschungsmethoden

Theorien sind Gefüge aus Hypothesen

Wissenschaftliche Hypothesen sind

- Annahmen über reale Sachverhalte (empirische Untersuchbarkeit)
- über den Einzelfall hinausweisend (Generalisierbarkeit)
- in Form von Konditionalsätzen (wenn – dann)
- durch Erfahrung widerlegbar (Falsifizierbarkeit)

Math konstruieren Theorien aus Definitionen und Sätzen

Text aus der Vorlesung Forschungsmethoden

Theorien sind Gefüge aus ~~Hypothesen~~

Grundlage sind Axiome

= freie Setzungen

Wissenschaftliche Hypothesen sind

- ~~Annahmen über reale Sachverhalte (empirische Untersuchbarkeit)~~
- über den Einzelfall hinausweisend (Generalisierbarkeit)
- in Form von Konditionalsätzen (wenn – dann)
- ~~durch Erfahrung widerlegbar (Falsifizierbarkeit)~~

Realitätsbezug ist nicht notwendig

dies gilt

Bewiesene Sätze sind nicht widerlegbar.

Allenfalls werden Beweislücken aufgedeckt.

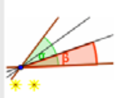
Math beweisen Unlösbarkeit

Die großen unlösbaren Probleme der Antike

Worum geht es?

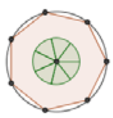
- Ein beliebiger Winkel soll mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile geteilt werden
- Zu einem Würfel soll mit Zirkel und Lineal ein volumenmäßig doppelt so großer Würfel konstruiert werden.
- Ein 7-Eck soll konstriert werden.
- Ein Kreis soll in ein flächengleiches Quadrat verwandelt werden.

Winkeldritteln

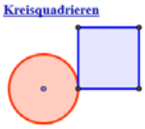


Würfelverdoppeln

7-Eck-konstruieren



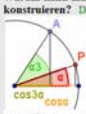
Kreisquadrieren



http://haftendorn.uni-lueneburg.de

Math beweisen Unlösbarkeit

Warum kann man aber nicht doch auf irgendeine Weise den Drittel-Winkel mit Zirkel und Lineal konstruieren? Diese Begründung ist als pdf aus der Seite Winkeldritteln als Quasikonstruktion pdf



Überlegung: Will man α aus α_3 bestimmen, dann ist das äquivalent zu dem Bestimmen von $\cos(\alpha)$ aus $\cos(\alpha_3)$.

Dann schreibt man mit Hilfe der Additionstheoreme $c := \cos(\alpha_3)$ in Termen von $k := \cos(\alpha)$

$$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha + 2\alpha) =$$
$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(\alpha)\sin(2\alpha) =$$
$$\cos(\alpha)(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) - \sin(\alpha)2\sin(\alpha)\cos(\alpha) =$$
$$k(k^2 - (1-k^2)) - 2(1-k^2)k =$$
$$k^3 - k + k^3 - 2k + 2k^3 = 4k^3 - 3k$$

Es folgt: $4k^3 - 3k - c = 0$, also: $\boxed{k^3 - \frac{3}{4}k - \frac{c}{4} = 0}$

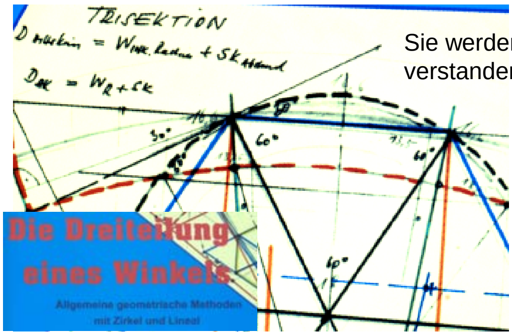
Zirkel und Lineal erzeugen nur Quadratwurzel-schachtelungen.

Sie können keine kubische Gleichung lösen.

http://haftendorn.uni-lueneburg.de

Math folgern Unlösbarkeit

z.B. aus der Galois-Theorie



Sie werden nicht verstanden.

Math folgern Unlösbarkeit

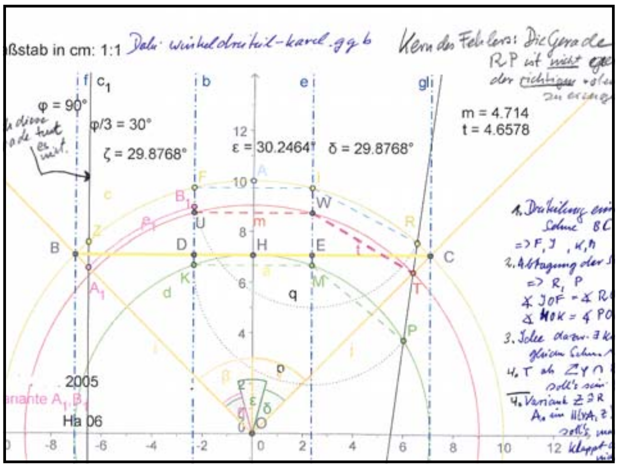
z.B. aus der Galois-Theorie

Sie werden nicht verstanden.

K.M., Trigon-Verlag

Diese unantiken mathematischen Persönlichkeiten, darum höchstmodernen mathematischen Katharer und zugleich mit allen Wassern einer theoretischen Algebra gnostisch profilierten Experten der Geometrie und der Mathematik, sie sind versammelt in der Kalypse des Galois'schen Schildes wie die Küken im Gefieder der Glucke, so seit 170 Jahren, und wirken als mathematisch agierende Phalanx in der Verteidigung der Apokalypse des Galois. Angesichts dieser heutigen Verteidigungswilligkeit der theoretischen Offenbarung des Galois durch mathematische Kompetenz kann man sich wohl erst in die "offene Feldschlacht" mit ihnen wagen, wenn man in den Besitz solcher Instrumente von gediegener mathematischer Exaktheit gelangt ist, die vom Ufer der sicheren Seite der Gewißheit stammen und die eine Galois mathematisch überlegene Logik verwirklichen.

bis zum Begriff. ein ganzes Jahr ist so vergangen. Aus der Wahrnahme der wirklichen geometrischen Sichtbarkeit entstand die Begriffenheit der wirklichen Dreiteilungslinie des Winkels. Diese Begriffenheit dieser Sichtbarkeit stelle ich gegen die geometrische Blindheit des Galois.



Math gehen mit ∞ um

ZEIT Nr. 24

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Math gehen mit ∞ um

6. Juni 2007 DIE ZEIT Nr. 24

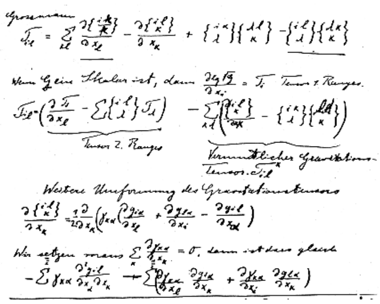
$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Mit ihrem Instrumentarium lassen sich Probleme bewältigen, bei denen das einfache Überlegen versagt.

Math

Einsteins

Unter-suchungen



Mit ihrem Instrumentarium lassen sich Probleme bewältigen, bei denen das einfache Überlegen versagt.

Math gehen mit ∞ um

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$$

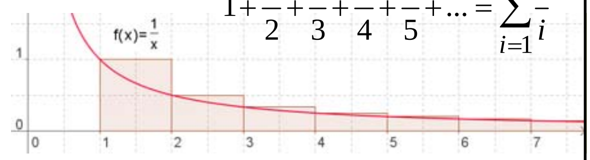
Dies ist die „harmonische Reihe“.

Strebt sie gegen einen endlichen Wert oder

wächst sie über alle Grenzen?

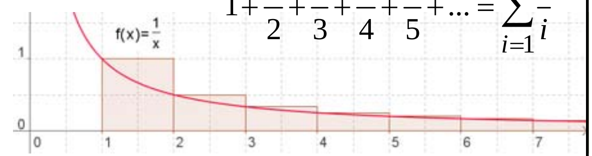
Math gehen mit ∞ um

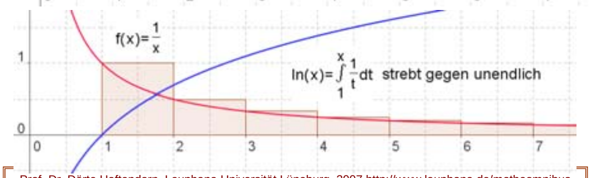
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$$



Math gehen mit ∞ um

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$$

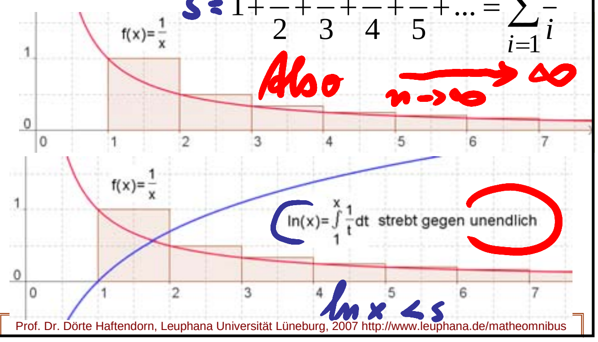




Math gehen mit ∞ um

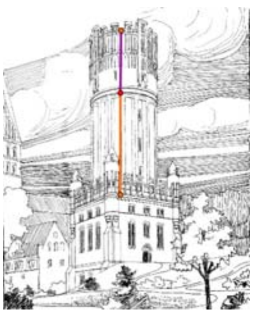
$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$$

Also $\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$



$\ln x < S$

Math haben Freude an schönen Verhältnissen

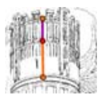


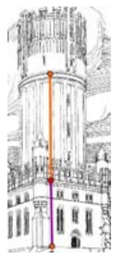
$$\frac{minor}{major}=\frac{major}{Ganzes}$$

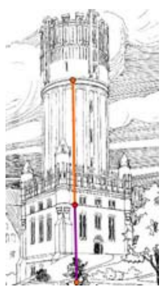
$$major = 0{,}6180 \cdot Ganzes$$

Goldener Schnitt

Math haben Freude an schönen Verhältnissen





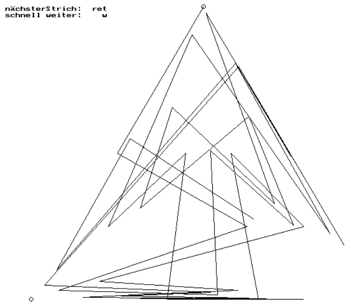


Goldener Schnitt

$$major = 0{,}6180 \cdot Ganzes$$

Mehr dazu http://haftendorn.uni-lueneburg.de im Bereich Geometrie

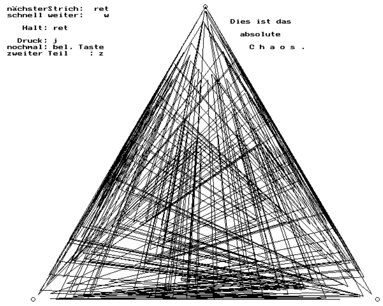
Math suchen die Ordnung im Chaos



Mehr dazu http://haftendorn.uni-lueneburg.de im Bereich Fraktale

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

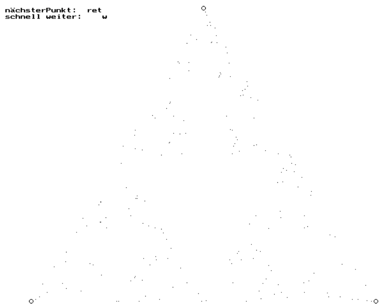
Math suchen die Ordnung im Chaos



Mehr dazu http://haftendorn.uni-lueneburg.de im Bereich Fraktale

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

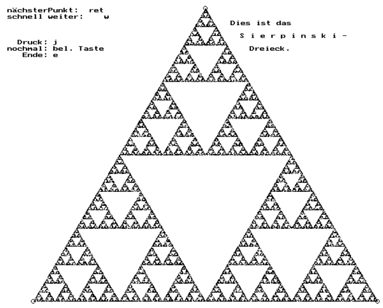
Math suchen die Ordnung im Chaos



Mehr dazu http://haftendorn.uni-lueneburg.de im Bereich Fraktale

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Math suchen die Ordnung im Chaos



Mehr dazu http://haftendorn.uni-lueneburg.de im Bereich Fraktale

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2007 http://www.leuphana.de/matheomnibus

Beschreibende Statistik, Hilfen zum Lernen und Bewältigen mit Fathom

Beschreibende Statistik, zusätzliche Hilfen

Warum hier?

Eigentlich ist dieses die Site "matheomnibus" für die Vorlesung "Mathe für alle". Statistik im Modul "Fachügreifende Methoden" wird von Prof. Dr. J-Merz, Paul Böhm und Mitarbeitern angeboten. Dort aber soll "von der Pike auf" die Handarbeit gelernt werden. Nun ist unbetritten klar, dass heute Statistik bei Anwendern mit Computern angegangen wird. Den Studierenden wird hiermit eine Möglichkeit geboten, zwischen diesen beiden Polen verständiges Wissen aufzubauen und das Gelernte gleich zu festigen. Bei allen Studierenden des Leuphana-Semesterns, auch denen, die nicht Statistik hören, können statistische Elemente in den Projekten der anderen Moduln vorkommen. Bei der Erarbeitung und Präsentation ist der Einsatz guter und wohlüberlegter statistischer Graphen sich sehr von Vorteil. [mehr dazu, auch Abgrenzungen zu anderen Programmen....(folgt)]

Fathom

Dynamische Stochastik- und Datenanalysesoftware
Sie wurde in den USA für den Einsatz in Bildungsinstitutionen entwickelt und ist von dem Kasseler Prof. Dr. Rolf Biehler und seinen Mitarbeitern in Deutsche übersetzt und an die hiesigen Bedürfnisse in der Hochschullehre und der gymnasialen Lehre angepasst worden. [zur Fathom-Hompage der Universität Kassel].
Die Leuphana Universität Lüneburg hat eine hochschulweite Lizenz erworben (jetzt erst ganz neu) und stellt sie den Lernenden und Lehrenden auf allen Rechnern der Hochschule zur Verfügung. [mehr zum Zugang und zum Start...(folgt)].

Einstieg

Dies ist die Kopfleiste in Fathom. Das Grundprinzip ist, dass man einen passenden Button auf die Arbeitsfläche zieht und dann die jeweiligen "Leerstellen" füllt. Zuerst muss man überhaupt Daten haben, die kommen in die "Kollektion", den Kasten.
[1. Lerndatei: Daten erzeugen pdf] [Ftm] Auf diese Weise wird gezeigt, dass es hier eine pdf-Seite gibt, die zum Lernen konzipiert ist. Der zweite Link macht die identisch aussehende Fathom-Datei, Endung *.ftm, verfügbar, damit mit man gleich alles ausprobieren und variieren kann, wenn Fathom auf dem Rechner verfügbar ist.

Die folgenden Lerndateien sollten möglichtst nacheinander angesehen werden. Sie bieten auch einen Einstig in die wichtigsten Grundelemente der beschreibenden Statistik.

- [1. Lerndatei: Daten erzeugen pdf] [ftm]
- [2. Lerndatei: Daten darstellen pdf] [ftm]
- [3. Lerndatei: Daten auswerten Level 1 pdf] [ftm]
- [4. Lerndatei: Daten auswerten Level 2 pdf] [ftm]
- [5. Lerndatei: Bivariate Daten auswerten Level 1 pdf] [ftm]
- [6. Lerndatei: Bivariate Daten auswerten Level 2 pdf] [ftm]

Die Hantierungen kann man sich auch gut von den in der Fathom-Hilfe verfügbaren Filmen vormachen lassen.
Überhaupt ist die "Hilfe" vorzüglich.
Nachdem Sie sich in den Lerndateien einiges haben genau erklären lassen, kommen Sie sicher über die "Hilfe" mit den statistischen Elementen Ihres Studiums zurecht.

Verteilungen

- [Lerndatei: Binomialverteilung Level 1 pdf] [ftm]

Weiteres

Wenn Ihnen nicht reicht, was hier steht, finden Sie noch auf der Site www.mathematik-verstehen.de im Bereich Stochastik viele Ergänzungen und Weiterführungen

Schmankerl

Eine Besonderheit von Fathom ist, dass man die Achsen einer Graphik interaktiv durch Ziehen mit der "Hand" verändern kann.
Damit sind faszinierende didaktische Möglichkeiten eröffnet, die hier in einigen Lerndateien dargestellt werden.

- [Lerndatei: Verkettung von Funktionenen pdf] [ftm]
- Wird noch ergänzt

[matheomnibus] [Plan und Konzept] [Themen] [Statistik-Hilfen] [Werkzeuge]

Inhalt und Webbetreuung ©Prof. Dr. Dörte Haftendorn Mai 2007, update 24. November 2007

matheomnibus

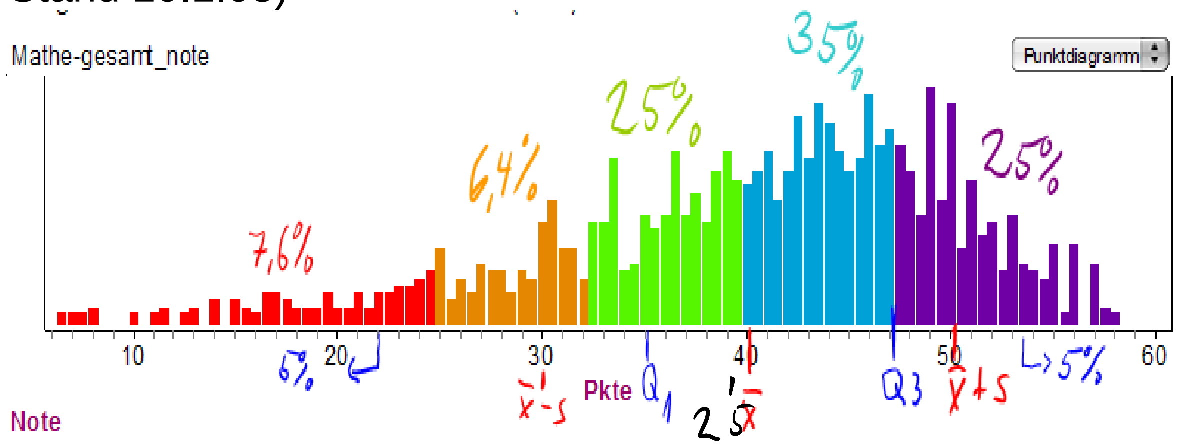
www.leuphana.de/matheomnibus www.mathematik-verstehen.de
www.doerte-haftendorn.de http://mathematik.uni-lueneburg.de

MATHEMATIK-VERSTEHEN Mathematik und Didaktik der Mathematik

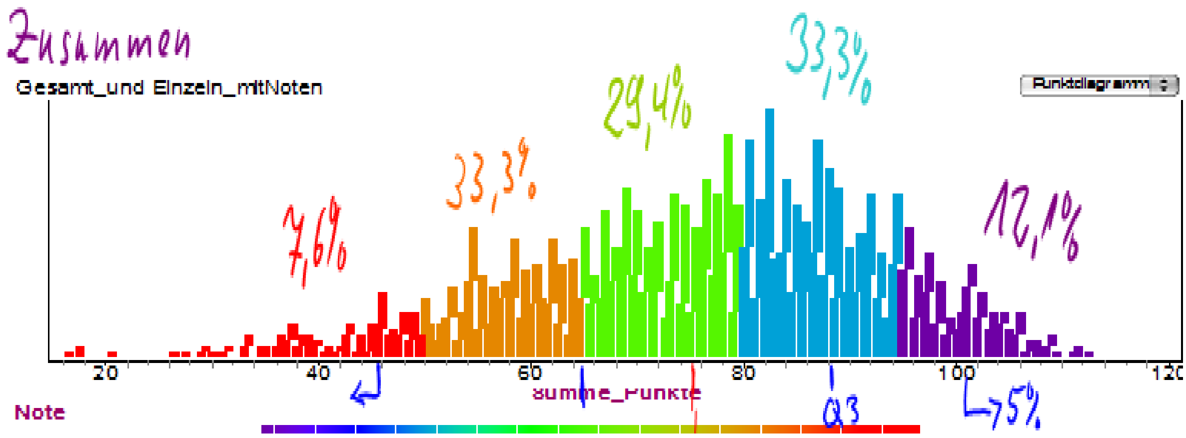
Klausur allgemein und "**Mathematik für alle**" WS 07/08

Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Ergebnis der Klausur von 1087 Studierenden (alle Math., Stand 10.1.08)



5	4	3	2	1



Gesamtpunktzahl und Noten von 1264 Studierenden.

Jeder Studierende hat zwei Klausuren zu je 60 Punkten, insgesamt also 120 mögliche Punkte.
Zum Vergleich der statistischen Kenngrößen ist unten die Punktzahl von Mathematik verdoppelt.
Mathematik hat also den hochsignifikant größeren Punkte-Mittelwert. Abstand etwa 8 mal Standardfehler.
60% der Mathematik-Noten waren 1 oder 2. Insgesamt waren 44,4% der Noten bei 1 oder 2.
Im 1-Sigma-Bereich um den Mittelwert waren bei der Verteilung für Einzelwerte in Mathmatik die Noten 3,7 bis 1,3 vertreten, in der Gesamtverteilung für Einzelwerte die Noten 4 bis 1,7.

Mathe-gesamt_note

doppPkt	80,692732
	1087
	19,188782
	0,58201294
	0
	84
	44
	107
	70
	95
	19,179954
	66

S1 = aMittel ( )
S2 = Anzahl ( )
S3 = StdAbw ( )
S4 = StdFehler ( )
S5 = Anzahl (fehlend ( ))
S6 = Median ( )
S7 = Perzentil (5; ?)
S8 = Perzentil (95; ?)
S9 = Q1 ( )
S10 = Q3 ( )
S11 = PopStdAbw ( )
S12 = Perzentil (20; ?)

Gesamt_und Einzeln_mitNoten

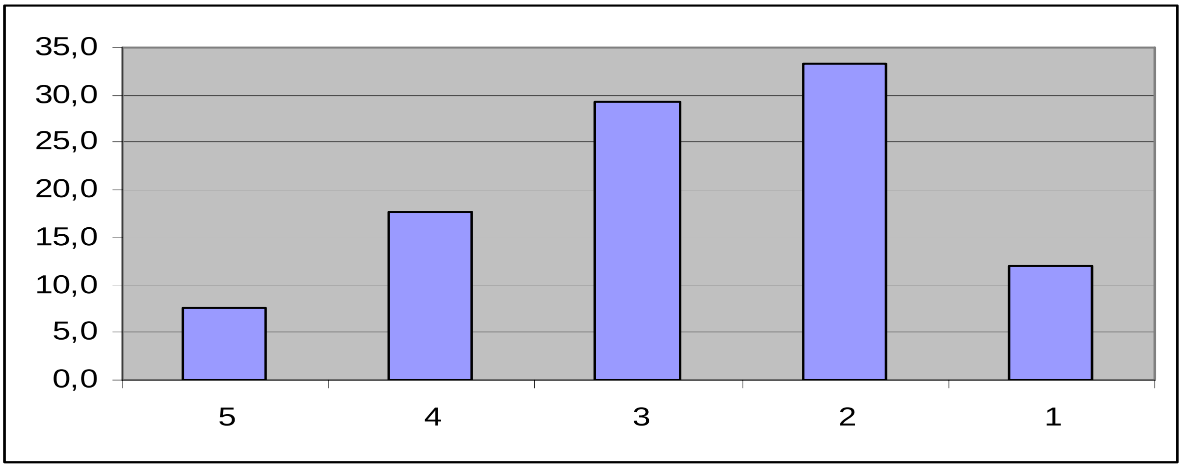
Summe_Punkte	75,721519
	1264
	16,87989
	0,47478401
	0
	78
	45,5
	101
	64,5
	88
	16,873212
	61

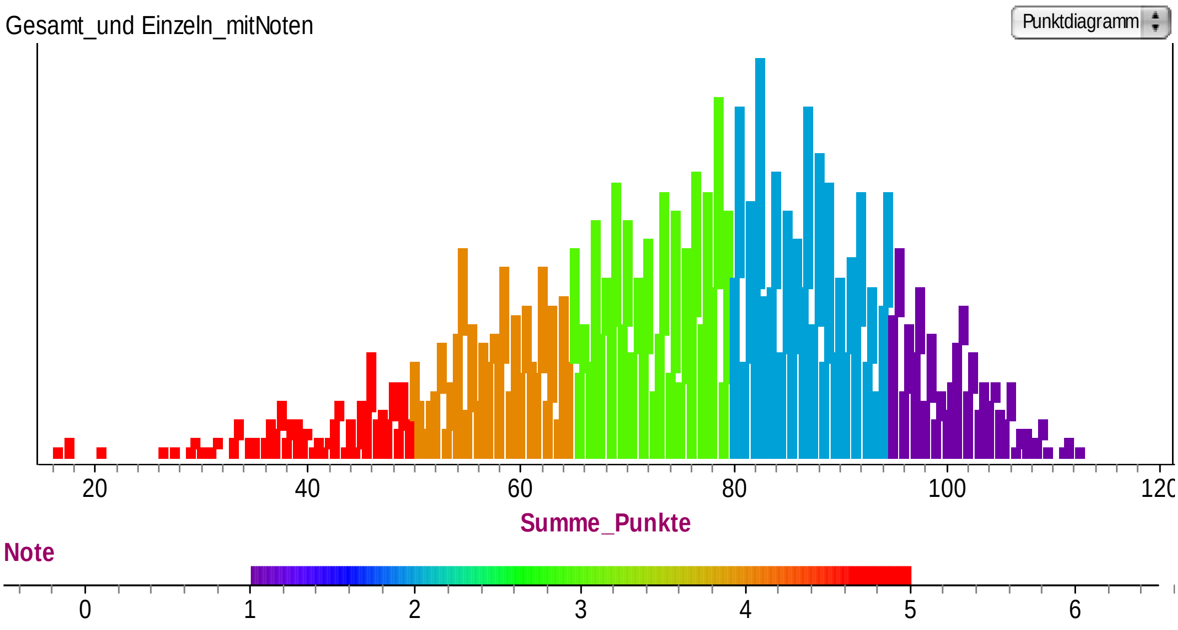
S1 = aMittel ( )
S2 = Anzahl ( )
S3 = StdAbw ( )
S4 = StdFehler ( )
S5 = Anzahl (fehlend ( ))
S6 = Median ( )
S7 = Perzentil (5; ?)
S8 = Perzentil (95; ?)
S9 = Q1 ( )
S10 = Q3 ( )
S11 = PopStdAbw ( )
S12 = Perzentil (20; ?)

Fächerübergreifende Methoden
Gesamtverteilung, Prozente über NotenWS 07/08

Graphiken von Haftendorn mit Excel und Fathom

1264 Studierende



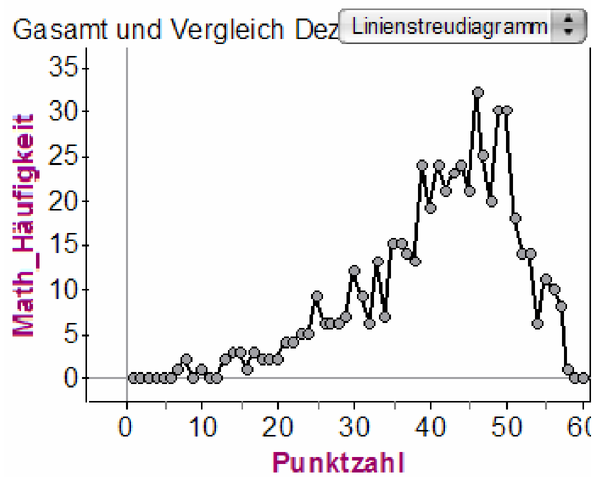


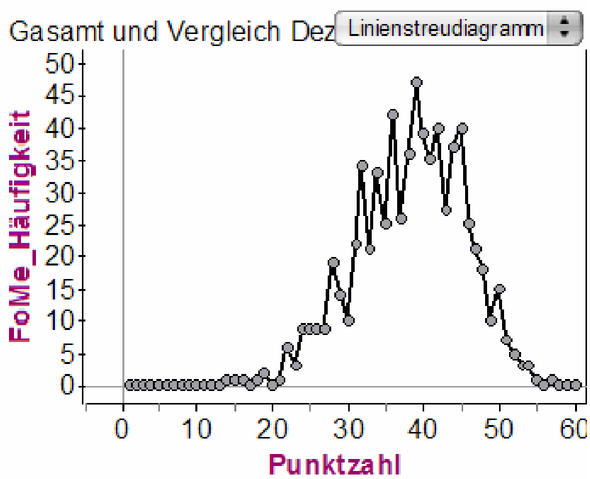
Vergleich der Verteilungen als Form

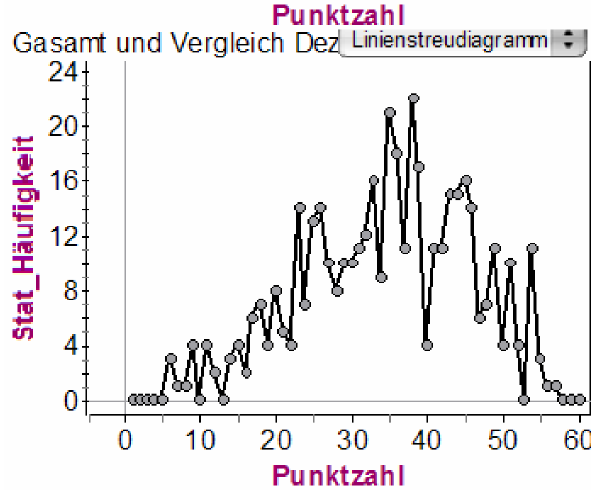
Die Mathematik-Verteilung ist breit und rechts-steil, Mittelwert bei 40,5, d.h. Note 2,3
Abb. rechts

Die Statistik-Verteilung ist breit und fast symmetrisch, Mittelwert 34,4, Note 3,3
Abb. rechts unten

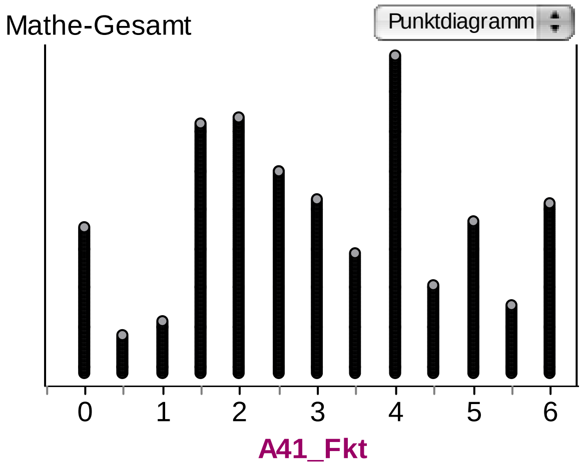
Die Forschungsmethoden-Verteilung ist eng und symmetrisch, Mittelwert bei 38,4, Note 2,7
Abbb. links unten

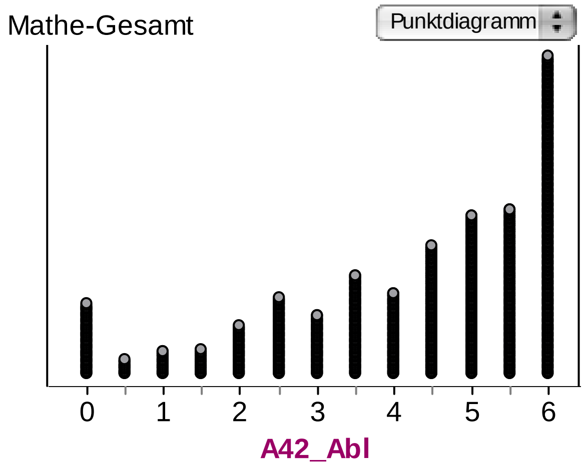




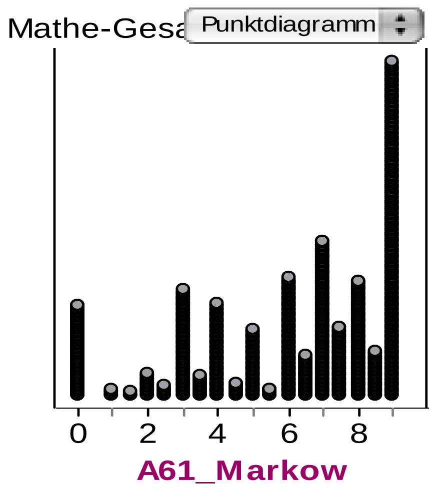


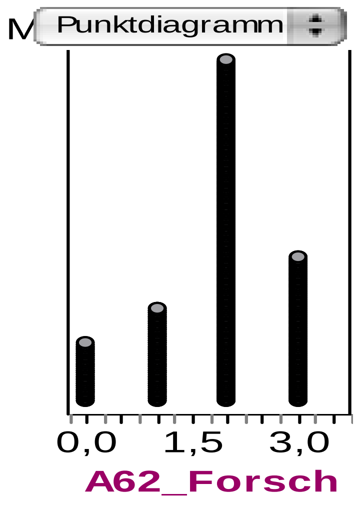
Analyse der Bewältigung der Einzelaufgaben in Mathematik

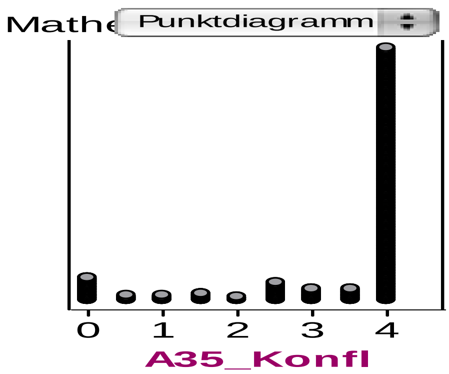




These: Je dichter am Schulstoff, desto schlechter.







Die Markowkette und die Forschungsfrage haben gut differenziert, wurden aber überwiegend bewältigt.

Der Konfliktgraph ist von den Meisten vollständig richtig gemacht.

Kleine Sammlung von positiven Bemerkungen aus der Evaluation
Mathematik für alle 07/08
Prof. Dr. Dörte Haftendorn Leuphana Universität Lüneburg.

Top!

Ich habe viele Themen aus der Schule jetzt erst richtig verstanden. Vorher konnte ich zwar die Rechenwege anwenden, aber ich wusste oft nicht wozu man das überhaupt braucht.
Der Realitätsbezug hat wirklich mathematisches Interesse geweckt.

Ich finde es gut, dass Sie versuchen die komplexen Themeninhalte für ALLE verständlich zu erläutern. Wir können jetzt zwar nicht alle Methoden einwandfrei anwenden, aber was viel wichtiger ist, verstehen wir die Zusammenhänge.

Lob: Woche für Woche mit über 1500 Studenten in 2 Veranstaltungen

Die „tobende Menge" hat D. Haftendorn sehr gut in den Griff bekommen

Sehr gut vorbereitete Professorin, engagiert und erklärt mit Freude u Witz die Inhalte

Fr. Haftendorn ist eine erfrischende Dozentin mit viel Humor

Sehr zugängliche ERKLÄRUNGEN.
SO MACHT MATHE SPASS.
TOLLE FRAU!

Es macht Spaß zu merken, wenn der Dozent sich für seine Vorlesung einsetzt ☺

Die Dozentin war immer sehr gut vorbereitet und hat viele verschiedene Programme eingesetzt, um Inhalte anhand von Beispielen zu verdeutlichen.

Sehr gute Darstellung der Themen durch tolle Präsentationen. Einfache und übersichtliche Beispiele super erklärt. War immer bereit nachträglich Fragen zu beantworten.
Danke für die Wiederholungsstunde am Samstag dass zeigt, dass Sie sehr engagiert sind.
Es hat Spaß gemacht.

Mathematik ist meine Lieblingsveranstaltung

Anmerkung: Negative Bemerkungen gab es natürlich auch, vor allem von solchen Studierenden, die das Konzept überhaupt ablehnten.

Stud. Lehrevaluation "**Mathematik für alle**" WS 07/08

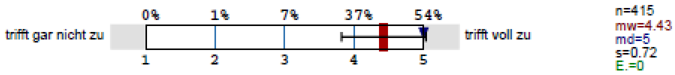
Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Vorbemerkung: Durch eine organisatorische Panne konnte die Studentische Lehrevaluation erst während des freiwilligen Repetitoriums am Samstag, den 2.12.07, eine Woche vor der Klausur, stattfinden. Damit wurden nur etwa 60% der Klausurteilnehmer, nämlich 613 Studierenden, erfasst. Die etwa 150 Hörer, die ihrer Klausuren woanders geschrieben haben wurden, nicht erfasst. Etwa 400 weitere Studierende sind bei dem Repetitorium nicht erscheinen. Darunter werden etliche sein, denen die Unterstützung in der Vorlesung, durch die Tutoren und in Moodle ausgereicht hat. Die Evalutation fand in zwei Gruppen statt, Gruppe 1 mit 413 Stud. 8-10 Uhr, Gruppe 2 mit 200 Stud. 10-12 Uhr.

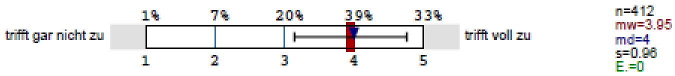
Gruppe 1

Die Dozentin / der Dozent

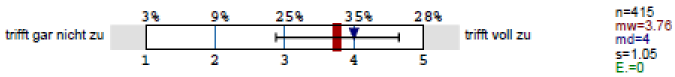
...wirkt gut vorbereitet.



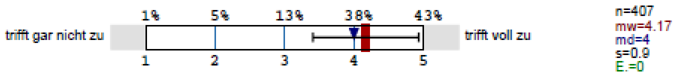
. ..spricht verständlich und anregend.



...motiviert die Teilnehmerinnen und Teilnehmer



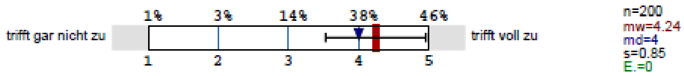
...legt Wert darauf, dass die Studierenden etwas lernen.



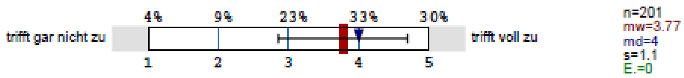
Gruppe 2

Die Dozentin / der Dozent

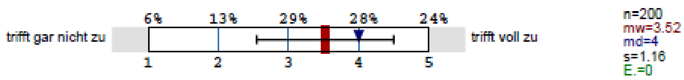
...wirkt gut vorbereitet.



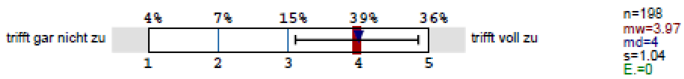
. ..spricht verständlich und anregend.



...motiviert die Teilnehmerinnen und Teilnehmer



...legt Wert darauf, dass die Studierenden etwas lernen.



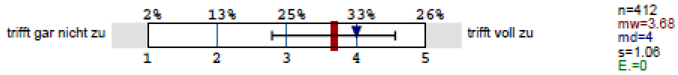
Fr. Haftendorn hat sich sehr bemüht, uns Studis die Mathematik auf eine Weise näher zu bringen, dass sie für jedermann fassbar wird.
KOMPLIMENT! DANKE!

Frau Haftendorn schafft es ihre Begeisterung bezüglich des Themas sehr gut zu vermitteln.
Sie gibt ihre Erfahrung in Bezug auf Unterrichtgestaltung super weiter.
Wir bräuchten mehr Lehrende ihres Formats!

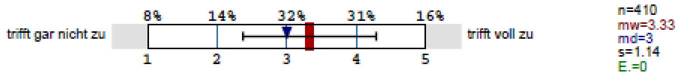
Gruppe 1

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Mathematik für Alle, Gruppe 1 / 08.12.

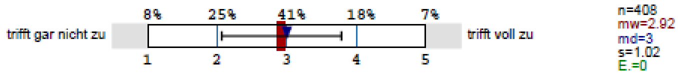
...versteht es, Interesse für die behandelten Themen zu wecken.



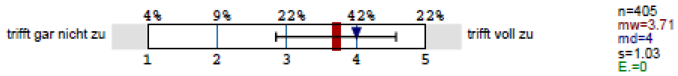
...kann Kompliziertes verständlich machen.



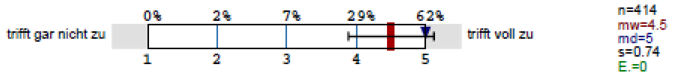
...fasst den Stoff regelmäßig zusammen.



...vermittelt den Nutzen der behandelten Inhalte.

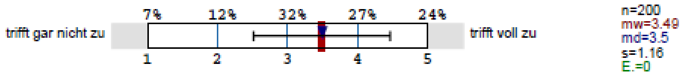


...zeigt insgesamt hohes Engagement für die Veranstaltung.

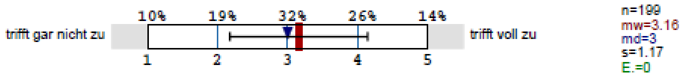


Gruppe 2

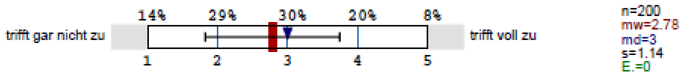
...versteht es, Interesse für die behandelten Themen zu wecken.



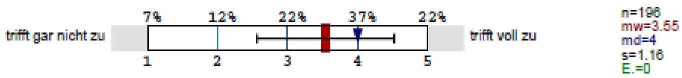
...kann Kompliziertes verständlich machen.



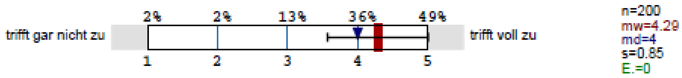
...fasst den Stoff regelmäßig zusammen.



...vermittelt den Nutzen der behandelten Inhalte.



...zeigt insgesamt hohes Engagement für die Veranstaltung.



Prof. Haftendorn ist die erste Mathe lehrerin, die in bestimmten Gebieten einen Realitätsbezug herstellen konnte !!

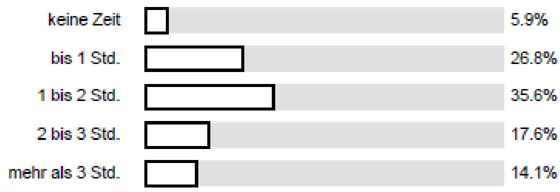
SEHR GUTER AUFBAU DER VORLESUNG!
MOODLE/MATHEOMNIBUS SEHR HILFREICH!

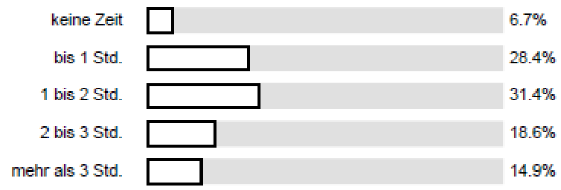
Danke an Frau Haftendorn für ihr endloses Engagement und ihren Einsatz.

Eine Email - Sonntag, 9. Dezember 2007, 13:45	Liebe Tutoren, ich möchte an dieser Stelle einmal die Gelegenheit ergreifen und euch für eure grandiose Arbeit als Tutoren danken!!! Dank euch habe ich die Klausur unbeschadet überstanden und denke, dass ich Mathe ganz gut hinbekommen habe. Vielleicht so gut, dass ich meine Patzer in Forschungsmethoden ausbessern kann. Ich kann nur sagen, weiter so!!! Und nochmal DANKE!!! Gruß Tini	Das Ergebnis war Note 1,7

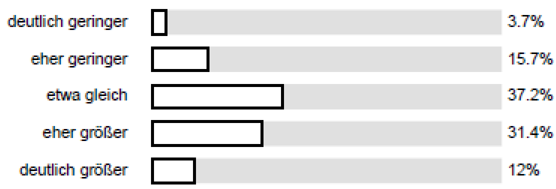
Workload

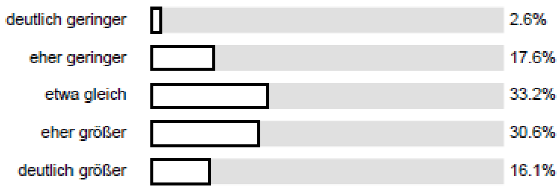
Wie viel Zeit wenden Sie im Durchschnitt pro Woche (außerhalb der Veranstaltung) für die Erarbeitung des Stoffes auf
(Vorbereitung, Nachbereitung ..)?





Wie hoch ist der Zeitaufwand für diese Veranstaltung im Vergleich zu anderen von Ihnen besuchten Veranstaltungen?





FRAU HAFTENDORN WAR ÜBERAUS ENGAGIERT UND VOR ALLEM AN DEM LERNERFOLG DER STUDENTEN/INNEN INTERESSIERT. DARÜBER HINAUS HAT SIE VERSUCHT DIE INHALTE ANHAND VON BSP. AUS "DEM LEBEN" ZU VERANSCHAULICH

Lehrinhalte wurden von Frau Haftendorn sehr gut erklärt und sie war stets darum bemüht, dass jeder Studierende bzw. jede Studierende den Inhalt der Lehrveranstaltung verstanden hat.

Ich finde es gut, dass Frau Haftendorn Die Lehrinhalte mit Tips/Anregungen mit einbezieht.

- Ich finde es toll wie Fr. Haftendorn es schafft so viele Stundenten einen Stoff zu vermitteln, wobei jeder andere Vorkenntnisse mitbrachte.
- Man konnte ihr gut zuhören. Gute Stimme

Insgesamt haben sich 208 der 613 Befragten schriftlich geäußert. Davon waren 115 ausdücklich positive Bemerkungen. Die negativen Bemerkungen bezogen sich im weit überwiegenden Teil auf die nächträgliche Einbindung der LA GHR-BA Studierenden vom 3. Semester. Diese Konstruktion wird es ja in späteren Semestern nicht mehr geben. Weitere negative Bemerkungen bezogen sich auf die Vielzahl der Studierenden. Da ist aber keine Änderung in Sicht und es ist auch sehr fraglich ob eine Halbierung z.B. reichen würde. Ein "Erarbeiten in kleinen Lerngruppen" wiederspricht auch der Intention, das muss ggf. dem weiteren Studienverlauf vorbehalten bleiben.
Als Fazit könnte das Übungsaufgabenangebot etwas ausgebaut und mit mehr verbalen Erklärungen versehen werden. Außerdem wären mehr Tuturensprechstunden sinnvoll. Dem Wunsch, vor allem nur für die Klausur Übungen zu machen, sollte nicht Vorschub geleistet werden.