

# Mit Anmerkungen versehen Nov. 2015

  
**LEUPHANA**  
 UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Klausur „Mathematik für alle“

Aufgaben und Lösungen

  
 Leuphana Universität Lüneburg

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

**Klausur**      **Mathematik für alle**

1. Codierung und Kryptografie Grundlagen [ 6 Punkte]

1.1 EAN ist die Abkürzung für

- Effektive Anfangs-Nummer
- Electric Arbitrary Number
- Europäische Artikel-Nummer

1.2 Was ist richtig?      **Codierung mit Hammingcode, für IBAN und QR-Code nur "verbale" Fragen in multiple choice**

- $35 \bmod 4 = 32$
- $35 \bmod 4 = 3$
- $35 \bmod 4 = 8$

1.3 Was ist richtig?

- $-9 \bmod 7$  gibt es nicht
- $-9 \bmod 7 = -5$
- $-9 \bmod 7 = 5$
- $-9 \bmod 7 = 16$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

**Klausur**      **Mathematik für alle**

1. Codierung und Kryptografie Grundlagen [ 6 Punkte]

1.1 EAN ist die Abkürzung für

- Effektive Anfangs-Nummer
- Electric Arbitrary Number
- Europäische Artikel-Nummer

1.2 Was ist richtig?

- $35 \bmod 4 = 32$
- $35 \bmod 4 = 3$
- $35 \bmod 4 = 8$

$35 = 32 + 3 = 8 \cdot 4 + 3$   
*4-Zahl suchen*

1.3 Was ist richtig?

- $-9 \bmod 7$  gibt es nicht
- $-9 \bmod 7 = -5$
- $-9 \bmod 7 = 5$
- $-9 \bmod 7 = 16$

$-9 + 14 = 5$   
*7-Zahl addieren bis das Erg. pos. ist*

Die Kommentare sind nicht verlangt, sie sind hier nur zum Verstehen der Antworten.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

**Klausur**      **Mathematik für alle**

---

A)  $3^{403} = 3^{400+3} = (3^4)^{100} \cdot 3^3 = 81^{100} \cdot 27 \equiv 7$

B)  $3^{12} = 3^{1+1+1} = 3^1 + 3^1 + 3^1 + 3^1 + 3^1 \equiv 1+1+1+1+1 \equiv 5 \pmod{7}$

C)  $3^{4742} \equiv 3^0 = 1$  denn  $4742 \equiv 0$ , Exponent mod Ordnung

1.4 Es ist klar, dass 3 die Ordnung 4 im Modul 20 hat. Welches sind (evtl.) richtige Rechenwege?

- Rechenweg A ist richtig.
- Rechenweg B ist richtig.
- Rechenweg C ist richtig.

Multiple-Choice-Fragen sind nun immer als MC-Frage gekennzeichnet. ungekennzeichnete Fragen sind sicher Single-Choice -Fragen.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

**Klausur**      **Mathematik für alle**

---

A)  $3^{403} = 3^{400+3} = (3^4)^{100} \cdot 3^3 = 81^{100} \cdot 27 \equiv 7$

B)  $3^{12} = 3^{1+1+1} = 3^1 + 3^1 + 3^1 + 3^1 + 3^1 \equiv 1+1+1+1+1 \equiv 5 \pmod{7}$

C)  $3^{4742} \equiv 3^0 = 1$  denn  $4742 \equiv 0$ , Exponent mod Ordnung

1.4 Es ist klar, dass 3 die Ordnung 4 im Modul 20 hat. Welches sind (evtl.) richtige Rechenwege?

- Rechenweg A ist richtig.
- Rechenweg B ist richtig.
- Rechenweg C ist richtig.

alle 4-Vielfachen im Exponenten kann man weglassen

d.h.  $3^4 \equiv 1 \pmod{20}$  übriges  $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{20}$

- Richtig sind A und C
- Mir war wichtig, dass bei diesem Thema auch die Kraft theoretischer Konzepte –hier der Algebra- deutlich wird.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

**Klausur**      **Mathematik für alle**

2. Diffie-Hellman-Verfahren [5 Punkte]

Anton und Berta wählen  $p=7$  und  $g=4$ .  
Anton wählt  $a=2$  und berechnet  $A = g^a \bmod p$  und sendet dies an Berta.  
Berta wählt  $b=4$  und berechnet  $B = g^b \bmod p$  und sendet dies an Anton.

2.1 Anton errechnet

- A = 6
- A = 4
- A = 2

2.2 Berta berechnet nun

- $A^b \bmod p$
- $B^a \bmod p$
- $A^b \bmod p$

2.3 Was stimmt? (evtl. mehrfach Antw.)

- Das D-H-Verfahren liefert einen Verschlüsselten Text.
- Das D-H-Verfahren liefert für Anton und Berta verschiedene aber passende Schlüssel
- Das D-H-Verfahren ermöglicht den Einsatz des sicheren One-Time-Pad-Verfahrens
- Diffie und Hellman waren die ersten, die für Kryptografie Primzahlen und Modulo-Rechnungen einsetzten.

RSA kann auch drankommen, falls Rechnungen, dann auch sehr kleine Zahlen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

## Klausur Mathematik für alle

### 2. Diffie-Hellman-Verfahren [5 Punkte]

Anton und Berta wählen  $p=7$  und  $g=4$ .  
 Anton wählt  $a=2$  und berechnet  $A := g^a \text{ mod } p$  und sendet dies an Berta.  
 Berta wählt  $b=4$  und berechnet  $B := g^b \text{ mod } p$  und sendet dies an Anton.

- 2.1 Anton errechnet
- A = 6
  - A = 4
  - A = 2

$$A = 4^2 \equiv 16 \equiv 14 + 2 \equiv 2$$

- 2.2 Berta berechnet nun
- A^B mod p
  - B^a mod p
  - A^b mod p

*denn es läuft auf  $g^{ab} = k$  hinaus*

- 2.3 Was stimmt? (evt. mehrfach Antw.)

- Das D-H-Verfahren liefert einen Verschlüsselten Text.
- Das D-H-Verfahren liefert für Anton und Berta verschiedene aber passende Schlüssel
- Das D-H-Verfahren ermöglicht den Einsatz des sicheren One-Time-Pad-Verfahrens
- Diffie und Hellman waren die ersten, die für Kryptografie Primzahlen und Modulo-Rechnungen einsetzten.

*ein gemeinsamer Schlüssel k mit dem dem ent Text verschlüsselt wird.*

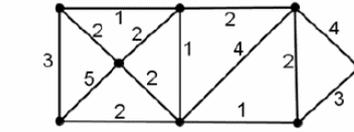
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

## Klausur Mathematik für alle

### 3. Graphentheorie [11 Punkte]

- 3.1 Ein Eulerscher Kreis (evt. mehrfach Antw.)
- enthält jede Kante genau einmal.
  - enthält jede Ecke genau einmal.
  - enthält keine Ecken mit ungeradem Grad.
  - ist in jedem zusammenhängenden Graphen möglich.

Auch "minimale Knotenfärbung".



- 3.2 Gesucht ist ein minimaler Spannbaum mit dem Greedy-Algorithmus. Die folgenden Zahlen sollen jeweils die nacheinander ausgewählten Kanten angeben. Welche Folge ist richtig?

- 1 1 1 2 2 3
  - 1 1 1 2 3 4
  - 1 1 1 2 2 2
- Auch "kürzeste Wege Spannbaum" von Startecke aus mit Beschriftung der anderen Ecken mit ihren Entfernungen zur Startecke.

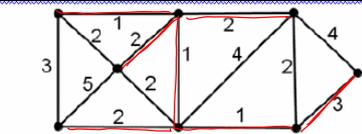
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

## Klausur Mathematik für alle

### 3. Graphentheorie [11 Punkte]

- 3.1 Ein Eulerscher Kreis (evt. mehrfach Antw.)

- enthält jede Kante genau einmal. *← nein, das ist Hamilton-Kreis*
- enthält jede Ecke genau einmal.
- enthält keine Ecken mit ungeradem Grad. *← nein, ungeraden Grad darf es nicht geben*
- ist in jedem zusammenhängenden Graphen möglich.



*Soviel kleine Werte wie möglich aber keine Kreise*

- 3.2 Gesucht ist ein minimaler Spannbaum mit dem Greedy-Algorithmus. Die folgenden Zahlen sollen jeweils die nacheinander ausgewählten Kanten angeben. Welche Folge ist richtig?

- 1 1 1 2 2 3
  - 1 1 1 2 3 4
  - 1 1 1 2 2 2
- Die Kommentare sind nicht verlangt, sie sind hier nur zum Verstehen der Antworten.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

## Klausur Mathematik für alle

### 3. Graphentheorie [11 Punkte] [Fortsetzung]

- 3.3 Das "Minimale-Wege-Problem" von einer Ecke zu allen anderen Ecken eines Graphen wird gelöst vom

- Fuzzy-Algorithmus
- Deister-Algorithmus
- Dijkstra-Algorithmus
- MWP-Algorithmus

- 3.4 Der Vierfarbensatz besagt, (evt. mehrfach Antw.)

- dass beim Drucken mit Computer die vier Farben Gelb, Magenta, Cyan und Schwarz reichen.
- dass zum Färben einer Landkarte vier Farben reichen.
- dass zum Kantenfärben von Graphen vier Farben reichen.
- dass zum Knotenfärben beliebiger Graphen vier Farben reichen.
- dass zum Knotenfärben ebener Graphen vier Farben reichen.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

## Klausur Mathematik für alle

### 3. Graphentheorie [11 Punkte] [Fortsetzung]

- 3.3 Das "Minimale-Wege-Problem" von einer Ecke zu allen anderen Ecken eines Graphen wird gelöst vom

- Fuzzy-Algorithmus
- Deister-Algorithmus
- Dijkstra-Algorithmus
- MWP-Algorithmus

- 3.4 Der Vierfarbensatz besagt, (evt. mehrfach Antw.)

- dass beim Drucken mit Computer die vier Farben Gelb, Magenta, Cyan und Schwarz reichen.
- dass zum Färben einer Landkarte vier Farben reichen.
- dass zum Kantenfärben von Graphen vier Farben reichen.
- dass zum Knotenfärben beliebiger Graphen vier Farben reichen.
- dass zum Knotenfärben ebener Graphen vier Farben reichen.

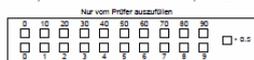
*← nein diese Einschränkung ist wichtig*

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

## Klausur Mathematik für alle

hat Konflikt mit →	Fautier	Elephant	Leuphant	Guruh
Fautier		x	x	x
Elephant	x			
Leuphant	x			x
Guruh	x		x	

- 3.5 Erstellen Sie aus dieser Adjazenzmatrix einen Konfliktgraphen und führen sie eine Knotenfärbung durch, so dass man erkennen kann, wer zusammen in ein Gehege kann. minimale



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Klausur **Mathematik für alle**

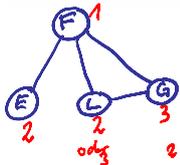
hat Konflikt mit →	Faultier	Elephant	Leupant	Guruh
Faultier		x	x	x
Elephant	x			
Leupant	x			x
Guruh	x		x	

3.5 Erstellen Sie aus dieser Adjazenzmatrix einen Konfliktgraphen und führen sie eine Knotenfärbung durch, so dass man erkennen kann, wer zusammen in ein Gehege kann.

Nur vom Prüfer ausfüllen

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					

□ = 0,5



3 Gehege ~~1, 2, 3~~  
 1: F allein  
 2: E+L oder E+G  
 3: Rest-Tier

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Klausur **Mathematik für alle**

4. Funktionen und Analysis [ 14 Punkte]

(A)  $f(x) = -\ln(x-1)$  ||| (B)  $g(x) = (x-3)^4 - 2$  ||| (C)  $k(x) = \cos(x-1) - 1$

4.1 Skizzieren Sie jede Funktion qualitativ in einem eigenen Koordinatensystem

Nur vom Prüfer ausfüllen

<input type="checkbox"/>									
<input type="checkbox"/>									

□ = 0,5

Hier erhalten Sie Karopapier.  
 1 cm entspricht 1  
 drei einzelne Zeichnungen  
 mit Asymptoten und Mittellinie (ggf.)

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Klausur **Mathematik für alle**

4. Funktionen und Analysis [ 14 Punkte]

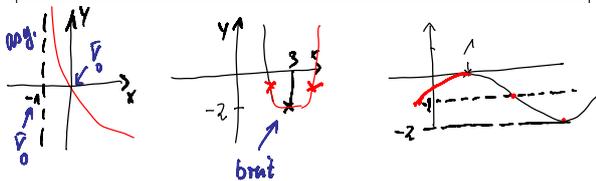
(A)  $f(x) = -\ln(x+1)$  ||| (B)  $g(x) = (x-3)^4 - 2$  ||| (C)  $k(x) = \cos(x-1) - 1$

4.1 Skizzieren Sie jede Funktion qualitativ in einem eigenen Koordinatensystem

Nur vom Prüfer ausfüllen

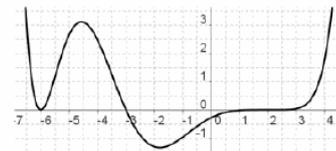
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					

□ = 0,5



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Klausur **Mathematik für alle**



4.2 Erzeugen Sie in obigem Bild mit "Felder-Abstreichen" einen qualitativen Graphen der Ableitung. Schreiben Sie in das Feld unten eine Funktionsgleichung für diese Funktion (ohne Ordinatenanpassung).

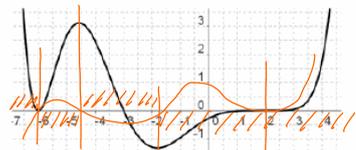
Nur vom Prüfer ausfüllen

<input type="checkbox"/>									
<input type="checkbox"/>									

□ = 0,5

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Klausur **Mathematik für alle**



4.2 Erzeugen Sie in obigem Bild mit "Felder-Abstreichen" einen qualitativen Graphen der Ableitung. Schreiben Sie in das Feld unten eine Funktionsgleichung für diese Funktion (ohne Ordinatenanpassung).

Nur vom Prüfer ausfüllen

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					

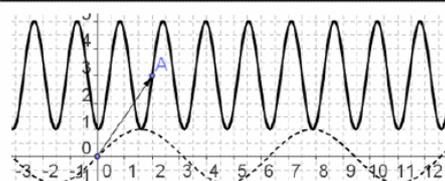
Graph der Ableitung des schwarzen Graphen 2 Punkte,  
 Richtung Breiter Sattel ergibt breites Extremum  
 Funktionsform des Schwarzen Graphen 2 Punkte

$f(x) = (x+6)^2(x+3)(x-2)^5$   
 ↑ Breiter Sattel      ↑ flacher Sattel

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Klausur **Mathematik für alle**

4. Funktionen und Analysis [ 14 Punkte] [Fortsetzung]



4.3 Es handelt sich um eine Funktion mit folgender Gleichung

- $f(x) = 2 \sin(x-2) + 3$
- $f(x) = 2 \sin(4(x-2)) + 1$
- $f(x) = 2 \sin(4(x-2)) + 3$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>



**Klausur Mathematik für alle**

6. Modellierung: "Stadtluft macht frei" [ 12 Punkte ] [Fortsetzung]

6.2 Prof. Mediavi (siehe vorige Seite) ist ein guter Historiker. Was macht er als tüchtiger Wissenschaftler, wenn er eine Quelle findet, die belegt, dass im Weserbergland ein Jahrhundert später etwa gleich viele Bürger, freie Bauern und Leibeigene lebten? (evt. mehrfach Antw.)

- Er modifiziert sein Modell mit anderen Übergangswahrscheinlichkeiten
- Er forscht, warum sich die freien Bauern im Weserbergland besser behaupten konnten als anderswo.
- Er sucht nach einer Gegend, in der sein Modell stimmt.
- Er bleibt bei seinem Modell und veröffentlicht nichts über die gefundene Quelle.
- Er erweitert sein Modell so, dass er noch mehr Einflüsse berücksichtigen kann.

1  
-1  
1

Das Modell hat 5% freie Bauern  
Im W. aber 33% also viel mehr als das Modell sagt. Für das W. passt das Modell nicht. Wenn er weiß warum dort mehr Bauern frei blieben, kann er sein Modell erweitern.

negative Punkte gehen nicht weiter!

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

**Klausur Mathematik für alle**

7.1 Das richtige Gerüst eines Bézier-Spline ist dargestellt in

 Bild A  
 Bild B

(A)  $101101$   
+  $110101$   
-----  
 $1011000$

(B)  $101101$   
+  $110101$   
-----  
 $1100010$

(C)  $101101$   
+  $110101$   
-----  
 $211202$

(D)  $10101$   
= 45

(E)  $101101$   
= 55

7.2 Die richtige Addition im Dualsystem ist dargestellt in

 Rechnung A  
 Rechnung B  
 Rechnung C

7.3 Die richtige Übersetzung vom Dualsystem in Dezimalsystem ist dargestellt in

 Bild D  
 Bild E

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

**Klausur Mathematik für alle**

7.1 Das richtige Gerüst eines Bézier-Spline ist dargestellt in

 Bild A  
 Bild B

(A)  $101101$   
+  $110101$   
-----  
 $1011000$

(B)  $101101$   
+  $110101$   
-----  
 $1100010$

(C)  $101101$   
+  $110101$   
-----  
 $211202$

(D)  $10101$   
= 45

(E)  $101101$   
= 55

7.2 Die richtige Addition im Dualsystem ist dargestellt in

 Rechnung A  
 Rechnung B  
 Rechnung C

7.3 Die richtige Übersetzung vom Dualsystem in Dezimalsystem ist dargestellt in

 Bild D  
 Bild E

im nur dieselbe Teilung  
gute nicht dual  
101101  
1 2 4 1 22 44  
5 11 45

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 07/08 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

**LEUPHANA**  
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

**Ergebnisse von Mathematik für alle**

Mathe-Gesamt (Punktdiagramm)

A41\_Fkt

(A)  $f(x) = -\ln(x+1)$  ||| (B)  $g(x) = (x-3)^2 - 2$  ||| (C)  $k(x) = \cos(x-1) - 1$

4.1 Skizzieren Sie jede Funktion qualitativ in einem eigenen Koordinatensystem

•These:  
•Je dichter am Schulstoff, desto schlechter.

Mathe-Gesamt (Punktdiagramm)

A42\_Abl

4.2 Erzeugen Sie in obigem Bild mit "Felder Abstreichen" einen qualitativen Graphen der Ableitung. Schreiben Sie in das Feld unten einen Funktionsgleichung für diese Funktion (ohne Ordinatenanpassung)

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, [www.mathematik-verstehen.de](http://www.mathematik-verstehen.de) [www.leuphana.de/matheomnibus](http://www.leuphana.de/matheomnibus)

**LEUPHANA**  
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

**Ergebnisse von Mathematik für alle**

Mathe-Gesamt (Punktdiagramm)

A61\_Markov

N (Punktdiagramm)

A62\_Forsch

Math (Punktdiagramm)

A35\_Konfl

Die Aufgabe zu Markowketten hat besonders gut differenziert.

Häufig war nicht gesehen, dass eine neue Forschungsfrage entsteht.

Die Aufgabe zum Konfliktgraphen hat kaum differenziert. Fast alle haben das gekonnt.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, [www.mathematik-verstehen.de](http://www.mathematik-verstehen.de) [www.leuphana.de/matheomnibus](http://www.leuphana.de/matheomnibus)

**LEUPHANA**  
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

**Klausur „Mathematik für alle“**

Note

5 4 3 2 1

7,6% 6,4% 2,5% 3,5% 2,5%

8 Note 2,3

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, [www.mathematik-verstehen.de](http://www.mathematik-verstehen.de) [www.leuphana.de/matheomnibus](http://www.leuphana.de/matheomnibus)

