Klausur Mathematik II Name: am 9.Juni 1998

Dr. Dörte Haftendorn ***Fachhochschule Nordostniedersachsen - Automatisierungstechnik***

Aufgabe 1 Numerische Differentialgleichungen

Gegeben ist die Differentialgleichung $$y' - 2y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{10}$$

a) Es gilt die Anfangsbedingung $x_0 = 0 \quad y_0 = -1$.

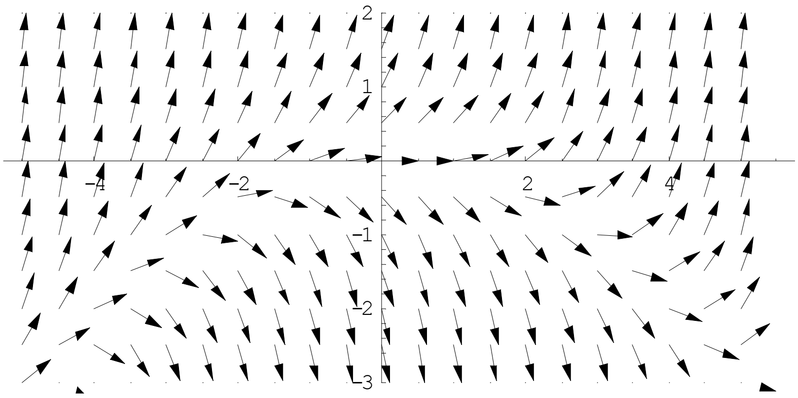
Bestimmen Sie mit der Schrittweite ***h=0,2*** rechts neben dem Anfangspunkt $\mathbf{P_o}$ **(** $\mathbf{x_o/ y_o}$ **)** näherungsweise noch **zwei** weitere Punkte $\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_2}$ mit dem **Heun-Verfahren.**
Schreiben Sie hier nicht mehr als 4 wesentliche Dezimalen auf. Rechnen können Sie dennoch mit voller Anzeige. Notieren Sie Zwischenergebnisse nachvollziehbar.

b) Weisen Sie nach, dass $$y = f_c(x) = c\,e^{2x} - \frac{1}{80}(10x^2 + 6x + 3)$$

allgemeine Lösung der DGL ist.

c) Bestimmen Sie in f_c die Konstante durch Verwendung der Anfangsbedingungen aus a). Berechnen Sie damit den Fehler, den Sie mit Ihrem 2. Punkt in a) gemacht haben.

d) Zeichen Sie die Lösung aus c) und zwei weitere deutlich verschiedene Lösungen grob ein.



e) Stellen Sie die Gleichung der **Isoklinen** auf. Zu welcher Kurvenfamilie gehören sie? Ist eine von ihnen eine Lösung der DGL?
Zeichnen Sie in das Richtungsfeld "nach Sicht" die Isokline für Steigung=0 und eine weitere grob ein.

Aufgabe 2 Numerische Analysis

a) Skizzieren Sie die Funktion $y = f(x) = e^{-x} + \sin x$ aus zwei Bausteinen ***g*** und ***h*** .
Nehmen Sie Stellung zum Gesamtverlauf.

b)Berechnen Sie die Nullstelle von ***f*** mit dem Newtonverfahren mit **zwei** Schritten. Notieren Sie Zwischenergebnisse nachvollziehbar.

c) Die Fläche unter ***f*** zwischen der Stelle $x = 0$ Und der Nullstelle rotiere um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers näherungsweise mit dem Keplerverfahren.

Aufgabe 3 Gegeben ist die **Differentialgleichung**

$y'' + y' - 6y = t - Sin(5t)$ mit den Anfangswerten $y(0) = -1$ **und** $y'(0) = 3$

a) Führen Sie den 1. Teil einer **Laplacetransformation** für die DGL durch.
Nur F(s) ist in gut weiterverwertbarer Form zu bestimmen.

b) Geben Sie den **Ansatz für eine Partialbruchzerlegung** des dabei auftretenden Terms

$$\frac{5}{s^2(s^2 + 25)(s^2 + s - 6)}$$. Deuten Sie an, wie nun ein Gleichungssystem entsteht.

Wählen Sie selbst frei erfundene Zahlen für die typischen Terme im Ergebnis und **übersetzen** Sie mit Hilfe der Tabelle **zurück** in den Originalbereich.

Die anderen Terme von F(s) brauchen Sie nicht zu berücksichtigen.

Es folgt Seite -2-

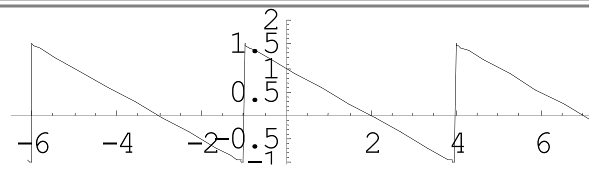
Klausur Mathematik II Name: am 9. Juni 1998

Dr. Dörte Haftendorn *Fachhochschule Nordostniedersachsen - Automatisierungstechnik*

Aufgabe 4

Gemessen wurde (1 / 5) ; (2 / 8) ; (3 / 13) ; (4 / 22). Es handelt sich um eine Gesetzmäßigkeit des Typs $y = a\ e^{b\ x}$. Bestimmen Sie a und b, indem Sie eine **Ausgleichsgerade** für die einfach-logarithmierten Daten errechnen. Eine Zeichnung ist nicht verlangt.

Aufgabe 5



Gegeben ist eine Kippschwingung (siehe Bild). Bestimmen Sie mit Hilfe eines Tafelwerkes in nachvollziehbarer Form die **Fourierentwicklung**. Berechnen Sie a_o auch von Hand, wenn Sie mögen elementargeometrisch.

Aufgabe 6 Statistik mit Musik

Eine Harfe hat 47 Saiten, die zusammen mit einer Kraft von 200 kN (entspricht einer Gewichtskraft von 2 Tonnen) den Rahmen der Harfe belasten. Einige dieser Saiten sind aus Stahl. Sie haben seinen Kern, der ganz fein umwickelt wird. Mathix stellt in seiner Stahlfabrik **Harfensaiten** her. Mathusalem hat eine gute Idee, das Herstellungsverfahren zu ändern, aber zunächst müssen einige statistische Untersuchungen angestellt werden.

a) Das neue Verfahren ist entwickelt worden, um die Zugfestigkeit zu erhöhen. Bisher war die Zugfestigkeit **F= 170 kN ± 4 kN.**
Es wurde an 5 zufällig ausgewählten neuen Saiten
gemessen: **172,2 175,8 169,6 178,2 177,2 kN** .
Geben Sie die neue Zugfestigkeit als Meßwert an.
Führen Sie einen **Gauß-Test**, einen **t-Test** und einen **F-Test** durch und formulieren sie jeweils einen Antwortsatz.

b) Bei der Herstellung solcher Saiten können unabhängig voneinander folgende Fehler auftreten:
Eine Saite kann eine schadhafte Ummantelung haben, sie kann den Zugtest oder auch den Klangtest nicht bestehen.
Beim alten Verfahren traten diese Fehler mit den Wahrscheinlichkeiten 5% // 2% // 10% auf.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit war beim alten Verfahren eine Saite völlig in Ordnung?
Mathusalem findet unter 200 ausgewählten Saiten 180 völlig heile. Auf welchem Signifikanzniveau kann er behaupten, sein Verfahren produziere mehr völlig heile Saiten als das alte Verfahren?

c) An völlig heilen A-Saiten kann Mathix 54 DM verdienen. Alle Saiten, die den Zugtest nicht bestehen verursachen 20 DM Verlust. Die anderen Saiten, die den Klangtest nicht bestehen oder eine schadhafte Ummantelung haben , müssen nachbearbeitet werden und ermöglichen dadurch den geringeren Verdienst von 31 DM. Welchen **Verdienst pro A-Saite** hatte Mathix auf lange Sicht bei der alten Produktion (Prozentsätze aus der Einleitung von Frage b), Baumdiagramm) ?

d) Bei 600 zufällig ausgewählten neuen Saiten wurden 63 gezählt, die Mängel aufwiesen. Bestimmen Sie auf den 1%-Niveau ein **Konfidenzintervall** (näherungsweise) für den Anteil mangelhafter Saiten in der neuen Produktion.

Beachten Sie bitte, dass die Aufgaben gleichmäßig entsprechend ihrem Aufwand gewertet werden. Dadurch haben sie aber deutlich unterschiedliche Punkte. Mit etwa 80% erreichen Sie "sehr gut" mit etwa 40 % bestehen Sie die Klausur.

Gutes Gelingen!

Klausur Mathematik II vom 9. Juni 1998

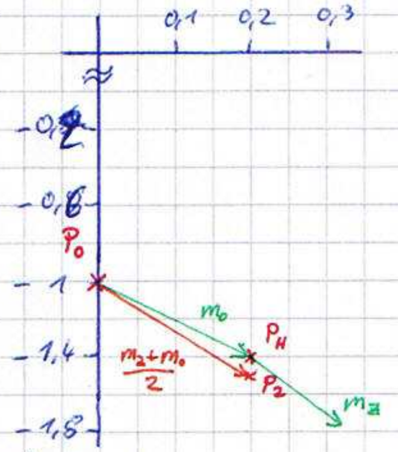
Aufgabe 1)

$$y' - 2y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{10} \Rightarrow y' = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{10} + 2y = g(x,y)$$

a) $x_0 = 0 \quad y_0 = -1 \quad h = 0{,}2$

$P_0\,(x_0 / y_0)$

Nur einen Punkt rechts neben P_0 bestimmen & erläutern



1.) Bestimmung des neuen x-Wertes x_1

$x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}2 = 0{,}2$

2.) Bestimmung der Steigung m_0 im Punkt P_0

$m_0 = g(x_0, y_0)$

$\quad = 0 - 0 - 2 = -2$

3.) Bestimmung des y-Wertes des Hilfspunktes $P_H\,(x_1 / z)$

$z = y_0 + h \cdot m_0 = -1 + 0{,}2 \cdot (-2) = -1{,}4$

4.) Bestimmung der Steigung m_z im Hilfspunkt

$m_z = g(x_1, z)$

$\quad = \frac{0{,}04}{4} - \frac{0{,}2}{10} + 2 \cdot (-1{,}4) = -2{,}81$

5.) Bestimmung des Punktes P_1 mit Hilfe des Mittelwertes von m_0 und m_z

$y_1 = y_0 + h\,\frac{m_0 + m_z}{2} = -1{,}481$

$\Rightarrow P_1\,(0{,}2 / -1{,}481)$

1b)

$$y = f_c(x) = c\,e^{2x} - \frac{1}{80}(10x^2 + 6x + 3)$$

$$y' = 2c\,e^{2x} - \frac{1}{80}(20x + 6)$$

$$y' - 2y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{10}$$

$$\cancel{2ce^{2x}} - \frac{2}{80}(10x+6) \cancel{- 2ce^{2x}} + \frac{2}{80}(10x^2 + 6x + 3) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{10}$$

$$-\frac{1}{4}x \cancel{- \frac{3}{40}} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{20}x \cancel{+ \frac{3}{40}} = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{10}$$

$$-\frac{x}{10} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{10} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow f_c(x)$ ist allg. Lsg. der DGL

1c)

$$y_0 = f_c(x_0)$$

$$-1 = c\,e^0 - \frac{1}{80}(3)$$

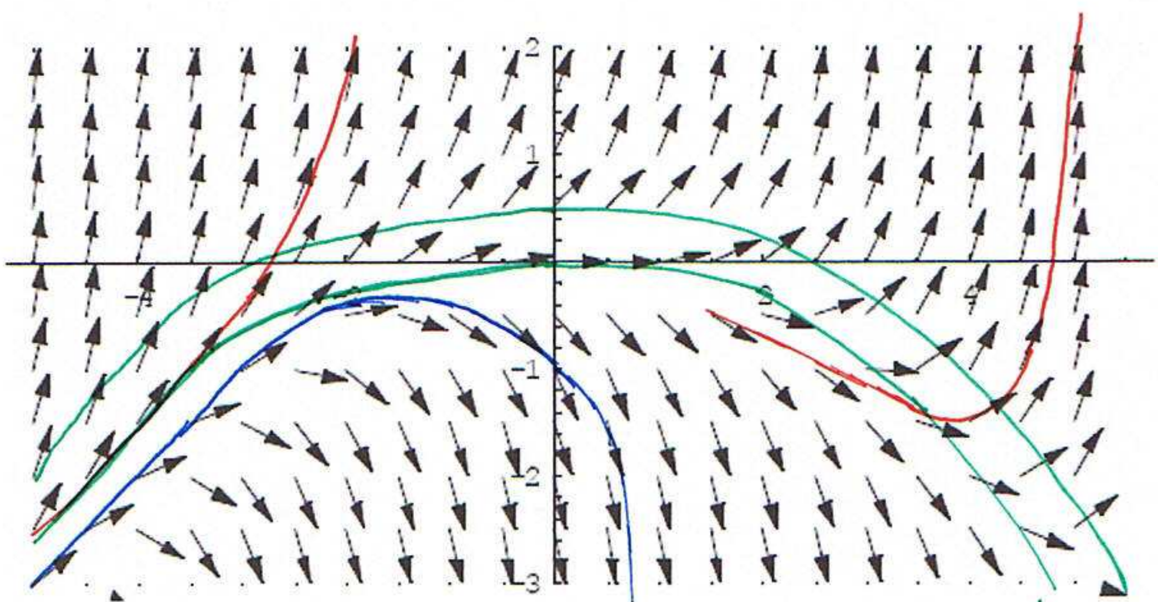
$$-1 = 1c - \frac{3}{80}$$

$$\underline{\underline{c = -\frac{77}{80}}}$$

$$y_1 = -\frac{77}{80}e^{0{,}4} - \frac{1}{80}(10 \cdot 0{,}04 + 6 \cdot 0{,}2 + 3)$$

$$y_1 = -1{,}49338\ldots$$

$$\text{Fehler} = 1 - \frac{1{,}481}{1{,}49338\ldots} = 0{,}00829 \cancel{\approx 0{,}83} \approx \underline{\underline{0{,}83\,\%}}$$



d) Lösung aus c)
zwei weitere deutlich verschiedene Lösungen

e) Isoklinen

1e)
$$y' = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{10} + 2y$$

$$m = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{10} + 2y$$

$$2y = m - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{10}$$

$$y = -\frac{x^2}{8} + \frac{x}{20} + \frac{m}{2}$$

Es handet sich um eine nach unten geöffnete, gestauchte und leicht nach rechts verschobene Parabel, deren Höhenlage durch $\frac{m}{2}$ bestimmt wird.

$$-\frac{x^2}{8} + \frac{x}{20} + \frac{m}{2} = c\,e^{2x} - \frac{1}{80}\left(10x^2 + 6x + 3\right)$$

$$\cancel{-\frac{x^2}{8}} + \frac{x}{20} + \frac{m}{2} = c\,e^{2x} \cancel{-\frac{1}{8}x^2} - \frac{3}{40}x - \frac{3}{80} \quad \Big| \; c = 0$$

$$\frac{x}{20} + \frac{m}{2} = -\frac{3}{40}x - \frac{3}{80}$$

$$\frac{1}{20}x + \frac{3}{40}x = -\frac{3}{80} - \frac{m}{2}$$

$$x = \left(-\frac{3}{80} - \frac{m}{2}\right) \cdot 8$$

$\Rightarrow$ Die Isoklinen und die Lsg der DGL schneiden sich in einem Punkt, sind aber nicht identisch.

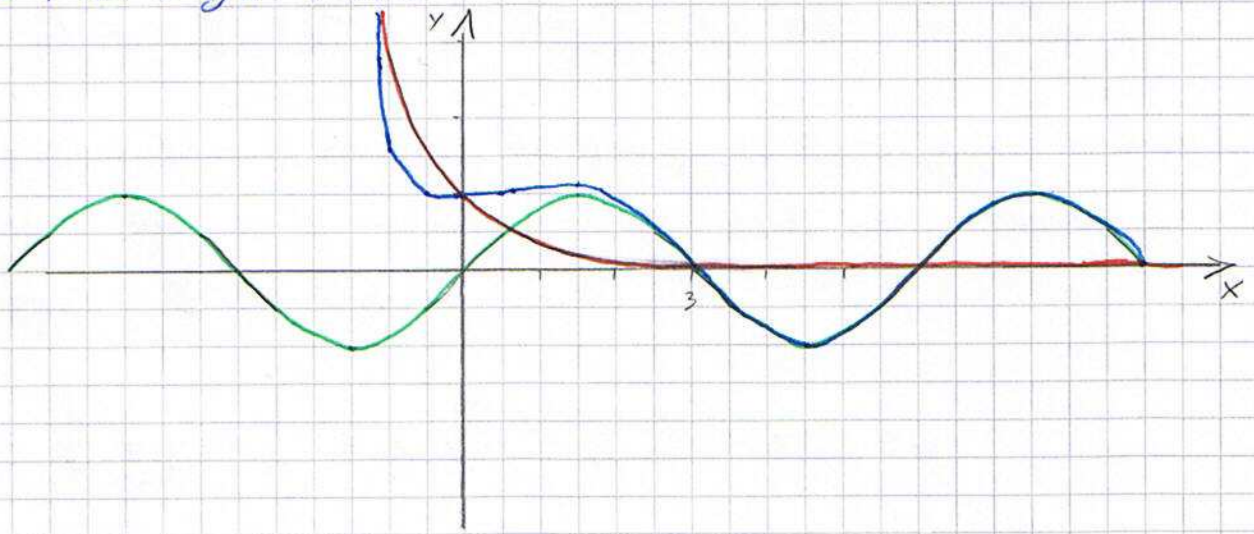
2a)

$$y = f(x) = e^{-x} + \sin x$$

$g(x) = e^{-x}$

$h(x) = \sin x$

$f(x) = g(x) + h(x)$



Für $x \to -\infty$ strebt die Fkt gegen e^{-x}

Für $x \to \infty$ verhält sie sich wie der $\sin(x)$

2b) Newtonverfahren (nur ein Schritt)

$x_0 = 3$

$n+1$	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
1	3	0,190907...	−1,03977...	3,1836...

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_n = 3{,}1836$$

c) $$V = \pi \int_0^{x_n} (f(x))^2\,dx = \pi \int_0^{x_n} (\sin(x))^2 + \frac{2\sin x}{e^x} + e^{-2x}\,dx$$

$$V \cong \pi \cdot \left(\frac{x_n}{6} \left(1 + 4 \cdot 1{,}448\ldots + 0{,}00\ldots\right)\right)$$

$$V \approx 3{,}6039 \cdot \pi = \underline{\underline{11{,}3219}}$$

3) a) $y'' + y' - 6y = t - \sin(5t)$

$y(0) = -1 \quad \wedge \quad y'(0) = 3$

$s^2 F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + s F(s) - y(0) - 6 F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{5}{s^2+25}$

$s^2 F(s) + s - 3 + s F(s) + 1 - 6 F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{5}{s^2+25}$

$F(s)\left(s^2 + s - 6\right) = \frac{1}{s^2} - \frac{5}{s^2+25} + 2 - s$

$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+s-6)} - \frac{5}{(s^2+25)(s^2+s-6)} + \frac{2-s}{(s^2+s-6)}$

b) Ansatz für eine Partialbruchzerlegung von

$F(s) = \frac{5}{s^2(s^2+25)(s^2+s-6)}$

NR: $s^2 + s - 6 = 0$

$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -0{,}5 \pm 2{,}5 \Rightarrow s = -3 \wedge s = 2$

$F(s) = \frac{5}{s^2(s^2+25)(s+3)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{(s^2+25)} + \frac{E}{(s+3)} + \frac{F}{(s-2)}$

$5 = A \cdot s(s^2+25)(s+3)(s-2) + B(s^2+25)(s+3)(s-2) + (Cs+D)(s^2)(s+3)(s-2)$
$+ E(s^2)(s^2+25)(s-2) + F(s^2)(s^2+25)(s+3)$

Einsetzen der Nullstellen $s = 0$; $s = -3$; $s = 2$ liefert $B; E; F$

Einsetzen weiterer beliebiger Werte liefert $A; C; D$

Wähle $A = 2$; $B = 3$; $C = 4$; $D = 5$; $E = 6$; $F = 7$

$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{4s}{(s^2+25)} + \frac{5}{(s^2+25)} + \frac{6}{(s+3)} + \frac{7}{(s-2)}$

$f(t) = 2 + 3t + 4\cos(5t) + \sin(5t) + 6e^{-3t} + 7e^{2t}$

4) entfällt in der Form

5) Nur Berechnung von a_0

$$a_0 = \frac{T}{2} \int_{(T)} f(x)\,dx$$

$$T = 5$$

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \frac{3 \cdot 1{,}5}{2} = 2{,}25$$

$$\int_{2}^{4} f(x)\,dx = -\frac{2 \cdot 1}{2} = -1$$

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = 2{,}25 - 1 = 1{,}25$$

$$a_0 = 2{,}5 \cdot 1{,}25 = \underline{\underline{3{,}125}}$$

6)

$F = 170\,kN \pm 4\,kN$

n	F_i	$(F_i - \bar{F})^2$
1	172,2	5,76
2	175,8	1,44
3	169,6	25
4	178,2	12,96
5	177,2	6,76
	873	51,92

$\bar{F} = 174,6$

$s = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 51,92} = 3,602776...$ A

$\frac{s}{\sqrt{5}} = 1,61121...$ B

$\underline{\underline{F = 174,6\,kN \pm 1,611\,kN}}$

Gauß-Test:

Da wir davon ausgehen, dass das neue Verfahren eine bessere Zugfestigkeit bewirkt, kann der Test einseitig ausgeführt werden.

H_0 Die Zugfestigkeit bleibt unverändert ($\mu = 170\,kN$)

H_1: Die Zugfestigkeit hat sich vergrößert ($\mu \geq 170\,kN$)

$$z = \frac{\bar{F} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{4,6}{\frac{4}{\sqrt{5}}} = 2,571...$$

$\Rightarrow \Phi(z) = 0,9950$

$z \downarrow$ $\Phi(z)$

$2,57 \rightarrow 0,9949$

$2,58 \rightarrow 0,9951$

$\alpha = 1 - \Phi(z) = 0,5\,\%$

Ein so großer Mittelwert und noch größere sind also recht unwahrscheinlich, Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,5\%$

t-Test

Einseitig (siehe Grund beim Gaußtest)

Hypothesen wie beim Gaußtest

$$t = \frac{|\bar{F} - \mu|}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{4,6}{1,61121...} = 2,85499...$$

$FG = n - 1 = 5 - 1 = 4$

FG

$\downarrow$

$4 \rightarrow 2,776$

$\downarrow$ einseitig

$\bar{\alpha}$ 0,025

$\alpha = 2,5\%$

Auch dieser Test zeigt, dass die Hypothese H_1 auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 2,5\%$ angenommen werden kann.

F-Test

(~~zwei~~einseitig, da kein Grund zur Annahme einer unterschiedlichen Streuung gegeben ist)

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \qquad \text{mit } s_1 = 4\,kN \wedge s_2 = 1,61121\,kN$$

$F_{ber} = 6,163328...$

$m_1 = \infty$

$m_2 = 5 - 1 = 4$

$\rightarrow \infty$

$\downarrow \quad \downarrow$

$4 \rightarrow 5,63 = F_{Tab} < F_{ber} \Rightarrow$ Der Unterschied der Varianzen bzw. der Standardabweichungen ist signifikant auf dem Niveau $\alpha = 10\%$

b)

$P(i.O.) = 0{,}95\% \cdot 0{,}98\% \cdot 0{,}9\%$

$= \underline{\underline{83{,}79\%}}$

$n = 200$

~~$k = 180$~~ $\Rightarrow$ ~~$n-k = 20$~~

$p = 0{,}8379 \qquad q = 1 - p = 0{,}1621$

$\mu = n \cdot p = 167{,}58$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot q} = 5{,}2119...$

Test einseitig, da Mathusalem glaubt, dass das neue Verfahren mehr völlig heile Seiten produziert, als das alte.

Kritisches Gebiet: $\{180; 181; 182; ... 200\}$

$\alpha = P(X \geq 180)$

$= 1 - P(X \leq 179)$

$P(X \leq \overset{k}{\cancel{179}}) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^{i} q^{n-i}$

$k = 179$

$P(X \leq 179) = \sum_{i=0}^{179} \binom{200}{i} 0{,}8379^{i} \cdot 0{,}1621^{200-i}$

TI: $\Sigma(nCr(200, i) * 0{,}8379 \wedge i * 0{,}1621 \wedge (200 - i), i, 0, 179)$

$P(X \leq 179) \approx 0{,}9918$

$P(X \geq 180) = \alpha = 1 - 0{,}9918 = 0{,}0082 < 0{,}9\%$

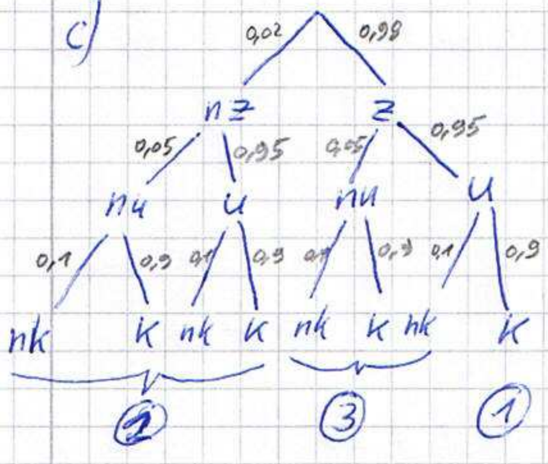
Er kann auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}9\%$ behaupten, dass sein Verfahren mehr heile Seiten produziert, als das alte.

Alternativ:

$\Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(2{,}287) = 0{,}9890 = P(X \leq 179)$

$\Rightarrow \alpha = 1{,}1\%$

c)



Fall 1: heile $\rightarrow +54$ DM

Fall 2: Zugtest nicht bestanden $\rightarrow -20$ DM

Fall 3: Die Anderen $\rightarrow +31$ DM

$P(\text{Fall}1) = 83{,}79\%$

$P(\text{Fall}2) = 2\ \%$

$P(\text{Fall}3) = 0{,}98 \cdot 0{,}05 + 0{,}98 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}1 = 14{,}21\%$

V: Verdienst je Saite

$V = 54\,\text{DM} \cdot 83{,}79\% + 31\,\text{DM} \cdot 14{,}21\% - 20\,\text{DM} \cdot 2\%$

$V = 49{,}2517\ \text{DM}$

$\Rightarrow$ Er verdient pro Saite durchschnittlich 49,25 DM

6d)

$n = 600$

$k = 63$

$\alpha = 1\%$

α zweiseitig z

$\downarrow$

$0{,}01 \rightarrow 2{,}575829$

$z = 2{,}575829$

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx z \cdot \sqrt{\frac{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n}}$$

$$|0{,}105 - p| \leq 2{,}575829\sqrt{\frac{0{,}105(1-0{,}105)}{600}} = 0{,}032236...$$

$-3{,}22\%$ $+3{,}22\%$

$7{,}28\%$ $10{,}5\%$ $13{,}72\%$

$$\underline{\underline{7{,}28\% \leq p \leq 13{,}72\%}}$$