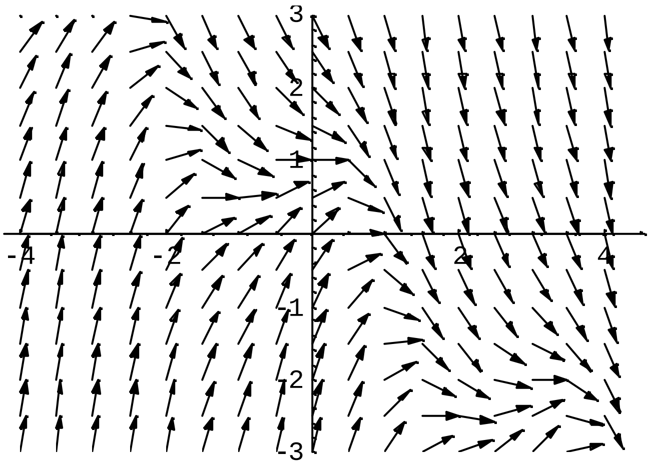
Aufgabe 1 Numerische DGLn



Gegeben ist die DGL

$$y' + y = \cos(2x) - x$$

Anfangswerte $x_0 = -3; \quad y_0 = 1$

a) Berechnen Sie mit dem Heunverfahren für h=0.5 einen nächsten Punkt. Zeigen Sie mit Hilfe einer mit Ihren Werten beschrifteten Skizze wie der nächste Punkte entsteht.
b) Heben Sie in dem gezeichnteten Richtungsfeld Ihren Schritt hervor. und zeichnen diese und zwei weitere davon wesentlich verschiedene Lösungen ein.

c) Zeigen Sie, dass $f_c(x) = c\,e^{-x} + 1 - x + 0{,}2\cos(2x) + 0{,}4\sin(2x)$ die allgemeine Lösung ist und bestimmen Sie c aus den Anfangsbedingungen.
Bestimmen Sie den Fehler, den Sie mit ihrem Heun-Schritt im Vergleich zum exakten Wert haben. Zeichnen Sie den Fehler in Ihrer qualitativen Skizze sinngemäß ein.
Was meint Mathix, wenn er witzelt, die Lösungen seien beinahe Geraden mit Dauerwelle?
d) Leiten Sie für die Isoklinenschar eine Gleichnung her. Heben Sie die Isokline für m=0 in dem Richtungsfeld hervor. Wie sehen die anderen Isoklinen aus (in Worten)? .
e) Sei die x-Achse die Zeitachse. Entwickelt sich das durch die DGL beschriebene Sytem für positive x dann stabil oder instabil (mit Begründung)?

Aufgabe 2 Numerische Analysis

a) Zeichnen Sie die Graphen von $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $h(x) = \frac{1}{x-1}$ und bilden Sie daraus mit deutlichem Bezug aufeinander den Graphen von $f(x) = g(x) + h(x)$.
b) Wie wird der Graph f außerhalb Ihres Zeichenbereichs aussehen?
c) Bestimmen Sie die Nullstelle mit dem Newtonverfahren in einem Schritt.
d) Zeigen Sie diesen Schritt an einer **qualitativen** deutlichen Extra-Skizze mit Beschriftung mit allen Zwischenwerte.
e) Berechnen Sie die Fläche zwischen f und g im Intervall [2,4] mit dem Keplerverfahren.
Zeichen Sie die Fläche ein und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis.
d) Mathix hat gehört, dass die Fläche unter der Hyperbel (von 2 bis unendlich) jeden Wert übersteigen kann. Kann man das mit numerischen Verfahren nachweisen? Antwort mit Begründung.

Aufgabe 3 Laplacetransformation

Geben ist die DGL $y'' + y' - 12y = \cos(2\,t) - t$ mit $y_0 = 1; \; y'_0 = -3$.

a) Führen Sie den 1. Teil einer Laplacetransformation für die DGL durch.
Nur F(s) ist in gut weiterverwertbarer Form zu bestimmen.
b) Geben Sie den Ansatz für eine Partialbruchzerlegung des dabei auftretenden Terms .

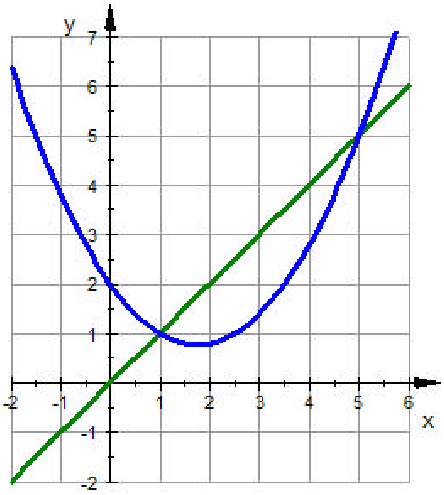
$$\frac{1-s}{s^2\left(s^2+s-12\right)\left(s^2+4\right)}$$

Deuten Sie an, wie nun ein Gleichungssystem entsteht.

Wählen Sie selbst frei erfundene Zahlen für die typischen Terme im Ergebnis und übersetzen Sie mit Hilfe der Tabelle zurück in den Originalbereich.
Die anderen Terme von F(s) brauchen Sie nicht zu berücksichtigen.

Es folgt Seite -2-

Aufgabe 4 Rekursion und Iteration



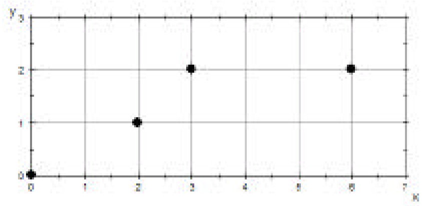
Gegeben ist als Trägerfunktion einer rekursiven Folge die Parabel $f(x)=\frac{2}{5}x^2-\frac{7}{5}x+2$

a) Notieren Sie die Rekursionsformel der zugehörigen rekursiven Folge und berechnen Sie mit dem Startwert $a_0 = 4$ die nächsten 4 Werte (nur Ergebnisse). Zeichen Sie die zugehörige Treppchenfolge ein.

b) Berechnen Sie die Fixpunkte und bestätigen Sie durch Rechnung, dass einer anziehend ist.

c) Markieren auf der x-Achse Bereiche für Startwerte, bei denen Konvergenz bzw. bestimmte Divergenz vorherrschen.

Aufgabe 5 Allerlei Daten

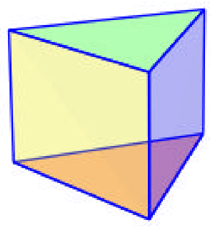


Mathix hat zu den Datenpunkten rechts den folgenden Polynomterm notiert: $1+\frac{87}{94}(x-2)+\frac{15}{47}(x-2)^2+\frac{23}{94}(x-2)^3$.

a) Entscheiden Sie begründet, ob es sich um das Interpolationspolynom oder ein Splinepolynom handelt. Nennen Sie die Konstruktionsbedingungen für Kubische Splines.

b) Bei Ausgleichskurven mit diesen Daten hat er r1=1, r2=0.99, r3=0.97, r4=0.87, r5=0.77 erhalten. Er hat in Excel Trendlinien angefordert für: A linear, B exponentiell, C poteniell, D polynomisch Grad 2, E polynomisch Grad 3. Ordnen Sie richtig zu. Zeichnen Sie Typ E ein.

Aufgabe 6 Stochastik in der Spielefabrik



Mathix ist jetzt Spielefabrikant geworden. Für sein neues Global-Prisma-Spiel werden ungleichmäßige Prismen (siehe Bild) aus einem schönen Material geformt. Auf den fünf Seitenflächen werden die 5 Kontinente abgebildet.

a) Man würfelt mit dem Prisma. Mit dem Kontinent, auf dem das Prisma zu liegen kommt, muss man im nächsten Zug Handel treiben. Dabei soll Australien mit 10%, Asien mit 15%, Europa mit 40%, Amerika mit 25% und Afrika mit 10% Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden. Mathix will prüfen, ob diese Vorgaben eingehalten werden und würfelt
Au 14, As 37, Eu 98, Am 41, Af 10. Auf welchem Signifikanzniveau kann er mit dem Chiquadrattest behaupten, die Prismen seien nicht gut genug geformt? (Ausführliche Bearbeitung mit eigener Tabelle).

b) Mathix redet ein ernstes Wörtchen mit seinem Team, dass die Prismen sorgfältiger geformt werden müssen. Später hat er den Eindruck, dass sie nun länger für 100 Prismen brauchen. Bisher waren es 23 h +/- 1 h, nun misst er für je 100 Prismen
23,5 25,8 22,9 26,1 23,1 Stunden Arbeitszeit. Geben Sie die mittlere Arbeitszeit als Messwert an. (Standardabweichung gemessen s=1,5433 h)

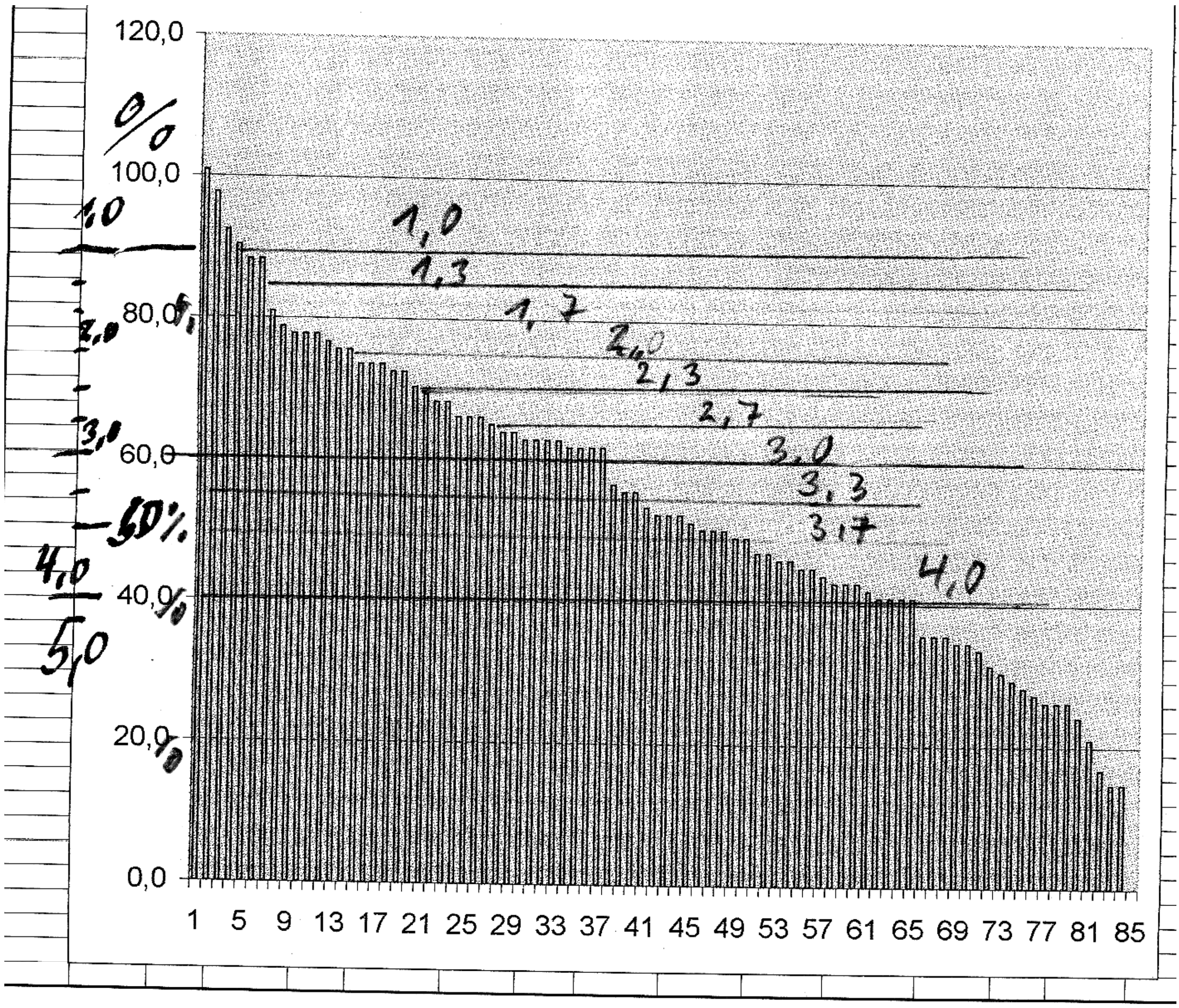
c) Führen Sie einen Gauß-Test durch, erläutern Sie das Vorgehen mit Hilfe einer Skizze. Führen Sie auch einen t-Test und einen F-Test durch und formulieren Sie jeweils einen auf die Aufgabe bezogenen Antwortsatz.

d) Nach der Markteinführung ermittelt das Mathenbach-Institut, dass von 250 zufällig ausgewählten Erwachsenen mit schulpflichtigen Kindern 142 schon von dem Global-Prisma-Spiel gehört hatten. Schätzen Sie den Bekanntheitsgrad unter den Erwachsenen mit Schulkindern mit einem 5%-Konfidenzintervall. Wägen Sie exaktes und näherungsweises Vorgehen gegeneinander ab.

Klausur AT
20.7.06

① a) Hum, Skizze	8
b) Z Lö + 2 weitere	3
c) fc allg,	3
C Best, Fehler, eins	5
Gerade mit D.welle	2
d) Z 0 - Iso	2
Iso gl., Ausdm	2
Stabil	1
	26
② Zg, h, f, Be Z	9
an Bew	1
c) Nav f'3	4
Werte	2
Skizze	2
e) Ansatz, Kep. Wert	5
Vgl.	1
d) Hyp ∞	2
	26
③ DGL Üb. F	6
Null 2	2
Ansatz	4
Gl. Sep. Wahl	3
Rück	4
	18
④ Rek. Z + 4 Werte Fr.	4
b Fixp. A l. Ent.	4
Div - Konv.	2
	10
⑤ a) Gplin, Entw.	6
b) Korr E … B	3
	9
⑥ a) X^2 Verf, Ant	8
b) Messwert	2
c) Gauß Δ ein, H:	4
Antw ∝	3
t Test Antw	4
F " "	4
Konfid, Nä Vgl.	5
	30
	119

roh	pkte		pkte
119	80%	Note	
0	95,2	1	bei 95,2
0,05	90,44	1	
0,1	85,68	1	86
0,15	80,92	1,3	81
0,2	76,16	1,7	77
0,25	71,4	2	72
0,3	66,64	2,3	67
0,35	61,88	2,7	62
0,4	57,12	3	58
0,45	52,36	3,3	53
0,5	47,6	3,7	48
0,55	42,84	4	43
0,6	38,08	4	39
0,8	19,04	5	
	Punkt-Untergenzen der Noten		
	Notendurchschnitt		
Wiederholer		Nr. 1-12	12
4,5			
AT und Inf		Nr. 13- 42	30
3,4			
WIng		Nr 43-80	38
3,2			
LBS		Nr 81-85	5
2,4			
	Prozente-Durchschnitt		
Wiederholer		Nr. 1-12	12
33,4	5		
AT und Inf		Nr. 13- 42	30
54,8	3,3		
WIng		Nr 43-80	38
57,0	3,3		
LBS		Nr 81-85	5
72,7	2,3		



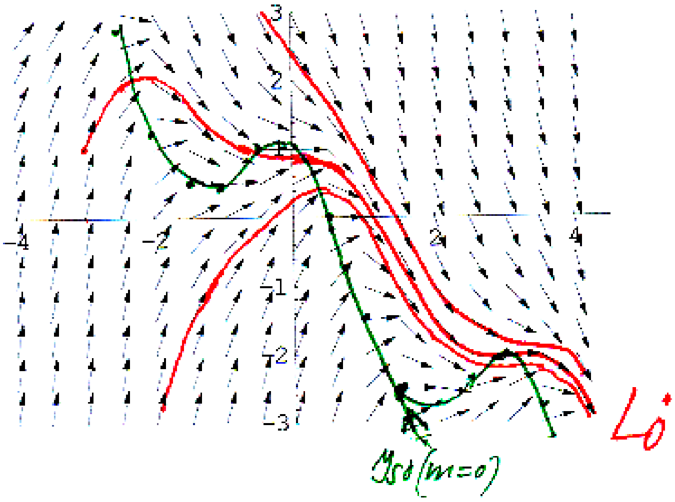
120,0
100,0
80,0
60,0
40,0
20,0
0,0
1 5 9 13 17 21 25 29 33 37 41 45 49 53 57 61 65 69 73 77 81 85
%
1,0
1,3
1,7
2,0
2,3
2,7
3,0
3,3
3,7
4,0
50%
5,0

Aufgabe 1 Numerische DGLn

Gegeben ist die DGL

$$y' + y = \cos(2x) - x$$

Anfangswerte $x_0 = -3; \quad y_0 = 1$



a) Berechnen Sie mit dem Heunverfahren für h=0.5 einen nächsten Punkt. Zeigen Sie mit Hilfe einer mit Ihren Werten beschrifteten Skizze wie der nächste Punkte entsteht.

b) Heben Sie in dem gezeichnteten Richtungsfeld Ihren Schritt hervor. und zeichnen diese und zwei weitere davon wesentlich verschiedene Lösungen ein.

c) Zeigen Sie, dass $f_c(x) = ce^{-x} + 1 - x + 0{,}2\cos(2x) + 0{,}4\sin(2x)$ die allgemeine Lösung ist und bestimmen Sie c aus den Anfangsbedingungen.
Bestimmen Sie den Fehler, den Sie mit ihrem Heun-Schritt im Vergleich zum exakten Wert haben. Zeichnen Sie den Fehler in Ihrer qualitativen Skizze sinngemäß ein.
Was meint Mathix, wenn er witzelt, die Lösungen seien beinahe Geraden mit Dauerwelle?

d) Leiten Sie für die Isoklinenschar eine Gleichnung her. Heben Sie die Isokline für m=0 in dem Richtungsfeld hervor. Wie sehen die anderen Isoklinen aus (in Worten)? .

e) Sei die x-Achse die Zeitachse. Entwickelt sich das durch die DGL beschriebene Sytem für positive x dann stabil oder instabil (mit Begründung)?

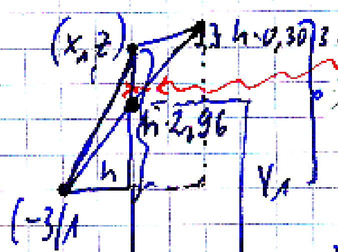
---

a) $P_0 = (-3/1) \quad g(x,y) = y' = \cos(2x) - x - y \qquad h = 0{,}5$

DEG 2,9945 $\quad m_0 = \cos(-6) + 3 - 1 = \cos(-6) + 2 = 2{,}96017 \qquad z = y_0 + h m_0 = 2{,}48009 \qquad \underline{x_1 = -2{,}5}$

$m_1 = \cos(-5) + 2{,}5 - 2{,}48\ldots = 0{,}303577 \qquad \bar{m} = (m_0 + m_1)\frac{1}{2} = 1{,}63187$

1,9983 $\quad y_1 = y_0 + h\,\bar{m} = \underline{1{,}81594}$ Neuer Punkt $P_1 = (-2{,}5 / 1{,}81594)$



→ 1−x ist ein Geradenteil, cos, sin erzeugen darauf eine Welle, e^{-x} mit Faktor −0,16 wirkt kaum. Mathix hat Recht.

c) $f_c(x) = ce^{-x} + 1 - x + 0{,}2\cos 2x + 0{,}4\sin 2x$

$f_c'(x) = -ce^{-x} - 1 - 0{,}4\sin 2x + 0{,}8\cos 2x$

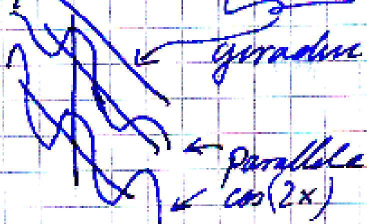
$+\; y + y' = 0 \quad - x \quad + 0 \quad + 1\cdot\cos 2x$

$= \cos 2x - x$ wie erwartet

d) Isoklinen

$m + y = \cos(2x) - x$

$y = \cos(2x) - x - m$



Sie sind parallel verschobene, schräggestellte Kosinus-2x-Fkt.

$f_c(-3) = 1 \Rightarrow ce^{3} + 1 + 3 + 0{,}2\cos(-6) + 0{,}4\sin(-6) = 1$

RAD 0,157 $\qquad \Rightarrow c = -0{,}164487 = c_0$

damit $y_{1\,\text{wahr}} = f_{c_0}(-2{,}5) = 1{,}93645$

$y_{1\,\text{Heun}} = 1{,}81594$

6,223% $\quad$ Fehler: $\Delta y \quad 0{,}12051$

nicht so sehr klein, aber in der Lösung eine Kuppe

e) Es entwickelt sich stabil. Lös. drängen sich zusammen.

Aufgabe 2 Numerische Analysis

a) Zeichnen Sie die Graphen von $g(x)=\frac{1}{4}x^2$ und $h(x)=\frac{1}{x-1}$ und bilden Sie daraus mit deutlichem Bezug aufeinander den Graphen von $f(x)=g(x)+h(x)$.

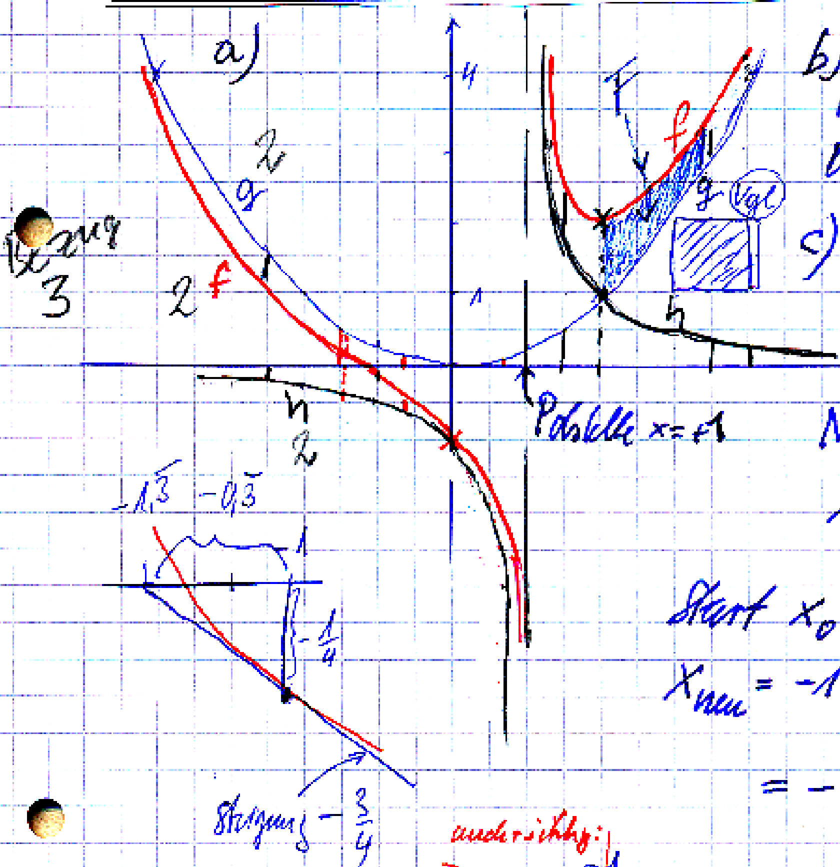
b) Wie wird der Graph f außerhalb Ihres Zeichenbereichs aussehen?

c) Bestimmen Sie die Nullstelle mit dem Newtonverfahren in einem Schritt.

d) Zeigen Sie diesen Schritt an einer **qualitativen** deutlichen Extra-Skizze mit Beschriftung mit allen Zwischenwerte.

e) Berechnen Sie die Fläche zwischen f und g im Intervall [2,4] mit dem Keplerverfahren. Zeichen Sie die Fläche ein und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis.

d) Mathix hat gehört, dass die Fläche unter der Hyperbel (von 2 bis unendlich) jeden Wert übersteigen kann. Kann man das mit numerischen Verfahren nachweisen? Antwort mit Begründung.



b) außerhalb sieht f aus wie die Parabel g links knapp darunter, rechts darüber 1

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x-1}$

$f'(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{(x-1)^2}$ 4

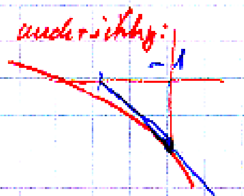
Newtonformel

$$x_{neu}=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{(x-1)^2}}$$

Start $x_0=-1$

$$x_{neu}=-1-\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=-1-\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{3}{4}}$$

$$=-1-\frac{1}{3}=-1\frac{1}{3}=-1{,}3333...$$ 3



2

e) Fläche $F=\int_2^4(f(x)-g(x))\,dx$

$$=\int_2^4\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{4}x^2\right)dx$$

$$=\int_2^4\frac{1}{(x-1)}\,dx\approx\frac{4-2}{6}\left(\frac{1}{2-1}+4\frac{1}{3-1}+\frac{1}{4-1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+2+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{9}=1{,}\bar{1}$$ 4

etwas mehr als $\boxed{///}$, kommt hin. 1

d) Man kann das nicht numerisch nachweisen, allenfalls plausibel machen.* Zum Nachweis dient ein Beweis, z.B. mit exakter Integration und ln-Betrachtung 2

* weil Zahlen immer endlich sind.

Aufgabe 3 Laplacetransformation

Geben ist die DGL $y''+y'-12y=\cos(2t)-t$ mit $y_0=1;\ y'_0=-3$.

a) Führen Sie den 1. Teil einer Laplacetransformation für die DGL durch.
Nur F(s) ist in gut weiterverwertbarer Form zu bestimmen.

b) Geben Sie den Ansatz für eine Partialbruchzerlegung des dabei auftretenden Terms .

$$\frac{1-s}{s^2\left(s^2+s-12\right)\left(s^2+4\right)}$$

Deuten Sie an, wie nun ein Gleichungssystem entsteht.

Wählen Sie selbst frei erfundene Zahlen für die typischen Terme im Ergebnis und übersetzen Sie mit Hilfe der Tabelle zurück in den Originalbereich.
Die anderen Terme von F(s) brauchen Sie nicht zu berücksichtigen.

$y''+y'-12y=\cos(2t)-t \qquad f(0)=y_0=1 \qquad f'(0)=y'_0=-3$

$(s^2F(s)-s\cdot 1-(-3))+sF(s)-1-12F(s)=\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2}$

$F(s)(s^2+s-12)-s+3-1=\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2}$ 2

$F(s)(s^2+s-12)=s-2+\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2}$

6 $F(s)=\frac{s-2}{(s-3)(s+4)}+\frac{s}{(s^2+4)(s-3)(s+4)}-\frac{1}{s^2(s-3)(s+4)}$

NR $(s^2+s-12)=0$

$s^2+s=12$

$s^2+s+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+12$

$\left(s+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$

$s=-\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}$

$s=3 \vee s=-4$

$\Rightarrow (s-3)(s+4)$ Linearfaktoren

b) $\frac{1-s}{s^2(s^2+s-12)(s^2+4)}=$ Ansatz 3

$\frac{1-s}{s^2(s-3)(s+4)(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-3}+\frac{D}{s+4}+\frac{Es+F}{s^2+4}$

multipl. mit Nenner

$1-s=As(s-3)(s+4)(s^2+4)+B(s-3)(\ )(\ )+Cs^2(s+4)(\ )\ldots\ldots$

3 Nun einsetzen von $s=3$, $s=-4$, $s=0$ und 3 freigewählte Werte.
Es ergibt sich ein lineares Gl.system für B, C, D (sofort klar) und A, E, F.

Wahl $A=2$ $B=3$, $C=4$, $D=5$, $E=6$, $F=7$

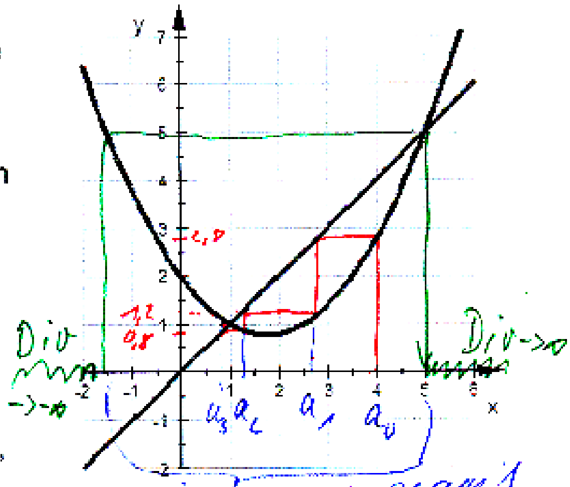
4 $\frac{2}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{4}{s-3}+\frac{5}{s+4}+\frac{6s}{s^2+4}+\frac{7}{s^2+4}$

$2+3t+4e^{3t}+5e^{-4t}+6\cos(2t)+\frac{7}{2}\sin(2t)=f(t)$

i.a.

Aufgabe 4 Rekursion und Iteration

Gegeben ist als Trägerfunktion einer rekursiven Folge die Parabel $f(x)=\frac{2}{5}x^2-\frac{7}{5}x+2$



Konvergenz gegen 1 möglich

a) Notieren Sie die Rekursionsformel der zugehörigen rekursiven Folge und berechnen Sie mit dem Startwert $a_0 = 4$ die nächsten 4 Werte (nur Ergebnisse). Zeichen Sie die zugehörige Treppchenfolge ein.

b) Berechnen Sie die Fixpunkte und bestätigen Sie durch Rechnung, dass einer anziehend ist.

c) Markieren auf der x-Achse Bereiche für Startwerte, bei denen Konvergenz bzw. bestimmte Divergenz vorherrschen.

a) $f(x)=\frac{2}{5}x^2-\frac{7}{5}x+2$ Trägerfkt

$a_n = \frac{2}{5}a_{n-1}^2 - \frac{7}{5}a_{n-1}+2$ rek. Folge

$a_0=4$ $a_1 = \frac{2}{5}\cdot 16 - \frac{7}{5}\cdot 4+2 = \frac{14}{5} = 2{,}8$

$a_2 = 1{,}216$

$a_3 = 0{,}88906$

$(a_4 = 1{,}0715)$

b) Fixpunkte $f(x)=x$

$\frac{2}{5}x^2 - \frac{7}{5}x+2 = x$

$x^2 - \frac{12}{2}x + 3^2 = -\cancel{4}5+9$

$x^2 - 6x + (3)^2 = 4$

$(x-3) = \pm 2$

$x = 3 \pm 2$

$\underline{x=5}$ ✓ $\underline{x=1}$

passt zur Z.

$f'(x) = \frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$

$|f'(1)| = \left|\frac{4}{5}-\frac{7}{5}\right| = \left|-\frac{3}{5}\right| < 1$

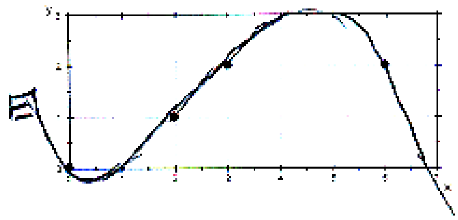
$x_{Fix1}=1$ ist also anziehend

Wie man auch sieht.

$x_{Fix2}=5$ ist ersichtlich abstoßend.

Aufgabe 5 Allerlei Daten

Mathix hat zu den Datenpunkten rechts den folgenden



Polynomterm notiert: $\frac{87\cdot x}{94}+\frac{15\cdot(x-2)^2}{47}-\frac{23\cdot(x-2)^3}{94}-\frac{40}{47}$ $= p(x)$

a) Entscheiden Sie begründet, ob es sich um das Interpolationspolynom oder ein Splinepolynom handelt. Nennen Sie die Konstruktionsbedingungen für Kubische Splines.

b) Bei Ausgleichskurven mit diesen Daten hat er r1=1, r2=0.99, r3=0.97, r4=0.87, r5=0.77 erhalten. Er hat in Excel Trendlinien angefordert für: A linear, B exponentiell, C potenziell, D polynomisch Grad 2, E polynomisch Grad 3. Ordnen Sie richtig zu. Zeichnen Sie Typ E ein.

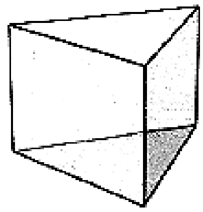
a) Es ist das 2. Spline-Polynom, ~~das~~ das zw. $x=2$ und $x=3$ gilt. $p(2) = \frac{87\cdot 2 - 40\cdot 2}{94} = \frac{94}{94} = 1$ passt.
Es ist für den "Nagel" 2 durch den Term $(x-2)^k$ angepasst.
Es ist auch $p(0) = \frac{112}{47} \neq 0$ darum ist es nicht das Interpolationspolynom aus E.

I Kubische Splines sind von Nagel zu Nagel Polynome 3. Grades, die an den Nägeln Steigungen und Krümmungen "übergeben".
Am Rand hat man zwei Bed. frei (natürl. Spline: d.h. dort Krümmung 0)

b) Korrelationskoeffizienten

$r1 = 1$ — E polynomisch Grad 3, kann genau treffen.
$r2 = 0{,}99$ — D Parabel — geht etwa
$r3 = 0{,}97$ — evt A linear
$r4 = 0{,}87$ — C potentiell
$r2$ bis $r4$: Nicht sicher zuzuordnen
$r5 = 0{,}77$ — B exponentiell kann nicht durch (0|0) gehen.

Aufgabe 6 Stochastik in der Spielefabrik



Mathix ist jetzt Spielefabrikant geworden. Für sein neues Global-Prisma-Spiel werden ungleichmäßige Prismen (siehe Bild) aus einem schönen Material geformt. Auf den fünf Seitenflächen werden die 5 Kontinente abgebildet.

a) Man würfelt mit dem Prisma. Mit dem Kontinent, auf dem das Prisma zu liegen kommt, muss man im nächsten Zug Handel treiben. Dabei soll Australien mit 10%, Asien mit 15%, Europa mit 40%, Amerika mit 25% und Afrika mit 10% Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden. Mathix will prüfen, ob diese Vorgaben eingehalten werden und würfelt
Au 14, As 37, Eu 98, Am 41, Af 10. Auf welchem Signifikanzniveau kann er mit dem Chiquadrattest behaupten, die Prismen seien nicht gut genug geformt? (Ausführliche Bearbeitung mit eigener Tabelle).

b) Mathix redet ein ernstes Wörtchen mit seinem Team, dass die Prismen sorgfältiger geformt werden müssen. Später hat er den Eindruck, dass sie nun länger für 100 Prismen brauchen. Bisher waren es 23 h +/- 1 h, nun misst er für je 100 Prismen
23,5 25,8 22,9 26,1 23,1 Stunden Arbeitszeit. Geben Sie die mittlere Arbeitszeit als Messwert an. (Standardabweichung gemessen s=1,5433 h)

c) Führen Sie einen Gauß-Test durch, erläutern Sie das Vorgehen mit Hilfe einer Skizze. Führen Sie auch einen t-Test und einen F-Test durch und formulieren Sie jeweils einen auf die Aufgabe bezogenen Antwortsatz.

d) Nach der Markteinführung ermittelt das Mathenbach-Institut, dass von 250 zufällig ausgewählten Erwachsenen mit schulpflichtigen Kindern 142 schon von dem Global-Prisma-Spiel gehört hatten. Schätzen Sie den Bekanntheitsgrad unter den Erwachsenen mit Schulkindern mit einem 5%-Konfidenzintervall. Wägen Sie exaktes und näherungsweises Vorgehen gegeneinander ab.

Merkmal	N_i	p_i	$H_i = np_i$	ΔN_i	ΔN_i^2	$\Delta N_i^2 / H_i$
Au	14	10%	20	−6	36	1,8
As	37	15%	30	7	49	1,633…
Eu	98	40%	80	18	324	4,05
Am	41	25%	50	−9	81	1,62
Af	10	10%	20	−10	100	5
	$n = 200$	$\Sigma 1$	200 ok	$\Sigma 0$ ok		$\chi^2 = 14,1033$

Hypothese
H_0: Würfel wie "Soll"
H_1: nicht wie "Soll"

Freiheitsgrad = Klassenzahl − 1 = 4 $\quad \chi_{Tab,\alpha=1\%} = 13,3 < \chi^2_{gem.} = 14,1$

Auf einem Signifikanzniveau von 1% kann Mathix behaupten, dass die Würfel (Prismen) nicht gut genug geformt sind. Die geworfenen Ergebnisse weichen signifikant vom Soll ab.

b) Zufallsgröße: T Arbeitszeit an 100 Prismen

T_i
23,5
25,8
22,9
26,1
23,1
121,4

in h

$\bar{T} = \frac{121,4}{5}$ h

$\bar{T} = 24,28$ h

$s = 1,5433$ h

$\frac{s}{\sqrt{5}} = 0,69_{0185}$ h

Gemessen wurde

$T = (24,28\text{h} \pm 0,690185)$ h

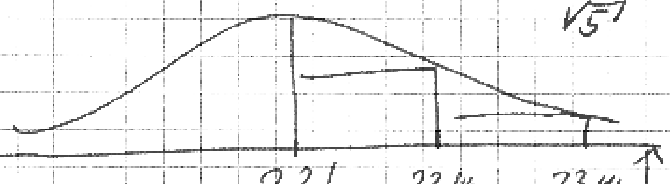
$T = 24,3 \text{ h} \pm 0,7$ h

c) Gaußtest H_0 $\mu = 23\,h$ Arbeitszeit wie vorher

H_1 $\mu > 23\,h$ Nun brauchen sie länger
einseitiger Test

mit $\sigma = 1h$ Standardabw. der Einzelwerte

also $\frac{\sigma}{\sqrt{5}} = 0{,}447..\,h$ Standardabweichung solcher Mittelwerte



Verteilung der Mittelwerte unter H_0

Man sieht schon, dass es signifikant zu lange dauert.

Prüfgröße $z = \frac{24{,}28 - 23}{0{,}447..} = 2{,}86..$

$\alpha = 1 - \Phi(z) = 1 - 0{,}9979 = 0{,}21\%$ Die Messung zeigt hochsignifikant ($\alpha \approx 0{,}2\%$), dass sich die Arbeitszeit verlängert hat.

t-Test Hypothesen wie oben, nun $s = 1{,}54..$ $\frac{s}{\sqrt{5}} = 0{,}69..$

Prüfgröße $t = \frac{24{,}28 - 23}{0{,}69} = 1{,}85458$

t_{Tab} $\alpha = 5\%$ $= 2{,}132 \not< 1{,}85 = t_{gem.}$ Der t-Test fällt nicht signifikant aus

einseitig 10% $= 1{,}533 < 1{,}85$ (allenfalls sehr sehr schwach).

(Er reagiert deutlich auf die große Stabw. der wenigen Werte.)

F-Test Es geht darum, ob sich die Standardabweichung signifikant verändert hat. (Zweiseitig, da vorher nichts bekannt)

$S_1 = 1{,}5733\,h$ $m_1 = 4$ $S_2 = 1h$ $m_2 = \infty$ Prüfgröße $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = 2{,}3847..$

F_{Tab} $\alpha = 10\%$ zw. $= 2{,}37 < F_{gem.}$ $4 \downarrow \infty \to 2{,}37$

Schwach signifikant hat sich die Standardabw. verändert. Die Arbeitszeit hat nun eine größere Schwankung.

d) Konfidenzintervall $n = 250$ Bernoulli-Kette $5\% \Rightarrow z = 1{,}96$
Spiel kennen ja kein

$$\left|\frac{142}{250} - p\right| \leq 1{,}96 \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} \approx 1{,}96 \frac{\sqrt{250 \frac{142}{250}(1 - \frac{142}{250})}}{250}$$

$$|0{,}568 - p| \leq 0{,}0641 \Leftrightarrow [50{,}6\% \leq p \leq 63\%]$$

In der Nähe von $p \approx 0{,}5$ kann man näherungsweise rechnen da der σ-Graph dort flach ist